Modelle der Mengenlehre

12 Januar 2021

NEUNTE VORLESUNG

§10 Ultraprodukte

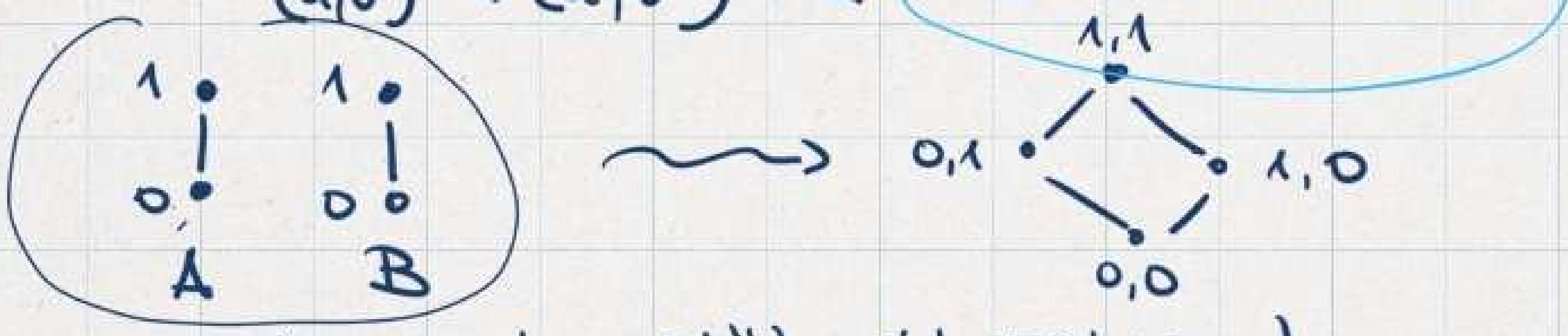
Sei I Indexmenge und $\mathfrak{A}_i$ S-Strukturen, dann können wir auf $\prod_{i\in I} A_i$ eine S-Struktur, das Produkt, definieren. Aber einiges geht kaputt.

Letztes Mal: Bsp. Körper.

Weiteres Bsp. Lineare Ordnungen $(A,<)$, $(B,<)$

Produkt $A\times B$ mit

$$(a,b) < (a',b') :\Longleftrightarrow a<a' \text{ und } b<b'$$



Also: Linearität geht verloren!

Bem. Die Produkte von linearen Ordnungen aus der Einf. in die ML sind NICHT dieses punktweise Produkt, sondern lexikographisch.

Aus praktischen Gründen heute nur:

RELATIONALE SPRACHEN

(nur Relationssymbole). Damit umgehen wir einige Wohldefiniertheitsbeweise, die man der Interpretation von Funktionssymbolen führen.

Notationell verwende ich immer einen binäres Relationssymbol: R.

$S = \{R\}$; R ist binäre Relationssymbol.

Das zweite Bsp. ~~zeigt~~, daß i.a. NICHT gilt

$$\forall i \in I\ \mathfrak{A}_i \models \varphi \implies \prod \mathfrak{A}_i \models \varphi$$

Idee: Bilde geeignete Quotienten.

DEFINITION (Filter)

Falls I Menge und $F \subseteq \mathcal{P}(I)$, so sagen wir, daß F ein FILTER ist, falls

(1) $\emptyset \notin F$, $I \in F$

(2) falls $A, B \in F$, so $A \cap B \in F$

(3) falls $A \in F$, $B \supseteq A$, so $B \in F$.

Falls $F \subseteq \mathcal{P}(I)$, so sagen wir F hat die **ENDLICHE SCHNITTEIGENSCHAFT** falls für alle $A_1, \dots, A_n \in F$ gilt, daß

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \neq \emptyset.$$

Falls $F \subseteq \mathcal{P}(I)$, so ist F eine **FILTERBASIS**, falls für $A_1, \dots, A_n \in F$

$$A_1 \cap \dots \cap A_n \in F$$

Falls $\emptyset \notin B$ und B ist eine Filterbasis, so erzeugt B einen Filter:

$$F := \{ A \subseteq I \,;\, \exists A' \in B \;\; A \supseteq A' \}$$

Ein Filter F heißt **ULTRAFILTER** falls für alle $A \subseteq I$ gilt

$$A \in F \text{ oder } I \setminus A \in F.$$

Ein Filter F heißt **FREI** falls

$$\bigcap F = \emptyset.$$

Andernfalls nennt man F **FIXIERT**.

Lemma Falls U ein fixierter Ultrafilter auf I ist, so ex. ein $i \in I$ mit

$$U = \{A \subseteq I ; i \in A\}.$$

Diese nennt man auch Hauptfilter.

Beweis Fixiert: $A_0 := \bigcap U \neq \emptyset$

[Insbesondere gilt: falls $A \in U$, so ist $A_0 \subseteq A$.] $(*)$

1. Überlegung: $A_0 \in U$.

Falls nicht, so ist $I \setminus A_0 \in U \overset{(*)}{\Longrightarrow} A_0 \subseteq I \setminus A_0$

Dies ist Wid. zu $A_0 \neq \emptyset$.

2. Überlegung: $A_0 = \{i\}$ für ein i.

Ang. $i \in A_0 \in U$.

$\{i\}$ $I \setminus \{i\}$

Nach Ultra gilt: $\{i\} \in U$ oder $I \setminus \{i\} \in U$.

$\overset{(*)}{\Longrightarrow} i \in A_0 \subseteq I \setminus \{i\}$

Wid.

$\downarrow$

Falls A_0 mehr als ein Elt. hat, so ist auch dies ein Wid.

$$\Longrightarrow A_0 = \{i\}.$$

q.e.d.

Falls $x, y \in \prod_{i\in I} A_i$ und F ist ein Filter auf I, so ist

$\sim_F$ definiert durch

$$x \sim_F y \;:\Longleftrightarrow\; \{i\in I;\, x(i) = y(i)\} \in F$$

eine Äquivalenzrelation. (1)

[Reflexiv: $x \sim_F x$: $\{i \in I;\, x(i) = x(i)\} = I \in F$.

Symmetrisch: $x \sim_F y$ $\{i\in I;\, x(i) = y(i)\} \in F$

$$\{i\in I;\, x(i)=y(i)\} = \{i\in I;\, y(i) = x(i)\}$$

$$\downarrow$$

$$y \sim_F x.$$

Transitiv: $x \sim_F y$ $\underbrace{\{i\in I;\, x(i) = y(i)\}}_{=A} \in F$

$y \sim_F z$ $\underbrace{\{i \in I;\, y(i) = z(i)\}}_{=B} \in F$

$$F \overset{(2)}{\ni} \{i\in I;\, x(i) = y(i) = z(i)\} \underset{(3)}{\subseteq} \{i\in I;\, x(i) = z(i)\} \in F$$

: Schnitt von A und B

]

Wir betrachten also den Quotienten

$$\prod_{i \in I} A_i \Big/ \sim_F$$

DAS REDUZIERTE PRODUKT DER $\mathfrak{A}_i$ MODULO F.

zugrunde liegende Menge

$$\mathrm{Red}(\mathfrak{A}_i, F)$$

Wie interpretieren wir das Symbol R

$$\mathrm{Red}(\mathfrak{A}_i, F) \models R(x,y)$$

$$:\Longleftrightarrow \{ i \in I ;\ \mathfrak{A}_i \models R(x(i), y(i)) \} \in F.$$

[Man beachte:

$$\mathrm{Red}(\mathfrak{A}_i, F) \models x = y$$

$$\Longleftrightarrow \{ i \in I ;\ \mathfrak{A}_i \models x(i) = y(i) \} \in F.]$$

Falls für alle $i \in I$ die Struktur $\mathfrak{A}_i$ gleich ist [ex. $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_i = \mathfrak{A}$ $\forall i$], so schreiben wir

$\mathrm{Red}(\mathfrak{A}, F)$ und nennen die die reduzierte Potenz von $\mathfrak{A}$ modulo F.

und falls F ein Ultrafilter ist, so nennen wir dies auch ULTRAPRODUKT bzw. ULTRAPOTENZ.

$\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, F)$
$\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}, F)$ als Notation.

<u>Lemma</u> Falls U ein Hauptultrafilter ist

$$\underline{U = \{A \subseteq I;\ i_0 \in A\}},$$

so gilt $\underline{\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U)} \cong \mathfrak{A}_{i_0}$.

<u>Beweis</u>. Was sind Objekte in $\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U)$?

$$\begin{aligned} x \sim_U y &\iff \{i \in I;\ x(i) = y(i)\} \in U \\ &\iff i_0 \in \{i \in I;\ x(i) = y(i)\} \\ &\iff x(i_0) = y(i_0). \end{aligned}$$

Definiere $\pi([x]_U) := x(i_0)$.

$$\pi : \prod_{i\in I} A_i \big/ \sim_U \longrightarrow A_{i_0}$$

1. Wohldefiniert?

$$x \sim_U y \Longrightarrow \pi([x]_U) = x(i_0) = y(i_0) = \pi([y]_U).$$

✓

2. Injektiv:

Falls $\pi([x]_U) = \pi([y]_U)$

$$\Longrightarrow x(i_0) = y(i_0) \Longrightarrow x \sim_U y. \Longrightarrow [x]_U = [y]_U.$$

3. Surjektiv. Klar.

4. Strukturerhaltend.

$$\mathfrak{A} \models [x]_U \, R \, [y]_U \Longleftrightarrow \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models x(i) R y(i)\} \in U$$

$$\Longleftrightarrow i_0 \in \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models x(i) R y(i)\}$$

$$\Longleftrightarrow \mathfrak{A}_{i_0} \models x(i_0) R y(i_0).$$

q.e.d.

Auch reduzierte Produkte erhalten im allgemeinen nicht alle Formeln:

In GA#9 sehen Sie ein Bsp. von linearen Ordnungen, deren red. Potenz nicht linear ist.

Also wird die Formel

$$\underbrace{\forall x \forall y (xRy \vee x=y \vee yRx)}$$

nicht von reduzierten Produkten erhalten.

Betrachten wir eine reduzierte Potenz

I Indexmenge, $\mathfrak{A}$ Struktur und F Filter auf I

$\mathrm{Red}(\mathfrak{A}, F)$.

Definiere $\pi : A \longrightarrow A^I/_{\sim_F}$ durch

$$a \longmapsto [c_a]_F$$

wobei $c_a : I \longrightarrow A$ die konstante Funktion $c_a(i) = a$ ist.

<u>Lemma</u> π ist eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathrm{Red}(\mathfrak{A}, F)$.

injektiv + Struktur-erhaltend

Bem. ① Das impliziert u.a., daß quantorenfreie Formeln zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathrm{Red}(\mathfrak{A},F)$ erhalten bleiben und daß

$$\mathfrak{A} \models \exists x \varphi \text{ und } \varphi \text{ ist quantorenfrei}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Red}(\mathfrak{A},F) \models \exists x \varphi.$$

② Im allgemeinen gilt nicht mehr. [GA #9]

Beweis des Lemmas.

Injektiv.

$$\pi(a) = \pi(b) \longrightarrow [c_a]_F = [c_b]_F$$

$$\Longrightarrow \{i \in I;\ c_a(i) = c_b(i)\} \in F$$

$$\|$$

$$\{i \in I;\ a = b\}$$

$$\Longrightarrow \{i \in I;\ a=b\} = I$$

$$\Longrightarrow a = b.$$

Strukturerhaltend:

$$\mathfrak{A} \models aRb \Longleftrightarrow \{i \in I;\ \mathfrak{A} \models c_a(i) R c_b(i)\} = I$$

$$\Longleftrightarrow \{i \in I;\ \underline{\mathfrak{A} \models c_a(i)}\ \underline{R c_b(i)}\} \in F$$

$$\Longleftrightarrow \mathrm{Red}(\mathfrak{A},F) \models \pi(a) R \pi(b)$$

q.e.d.

Falls allerdings $\mathcal{F}$ ein Ultrafilter ist, so ist diese Abbildung π eine elementare Einbettung

Theorem (Satz von Łoś)

Sei I eine Indexmenge, U ein Ultrafilter auf I, $\mathfrak{A}_i$ eine S-Struktur (für $i \in I$), φ eine S-Formel mit n freien Variablen und $x_1, \dots, x_n : I \to \prod_{i \in I} A_i$ mit $x_i(j) \in A_j$

$$\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \varphi([x_1]_U, \dots, [x_n]_U)$$

$$\iff \{ i \in I ; \mathfrak{A}_i \models \varphi(x_1(i), \dots, x_n(i)) \} \in U .$$

Beweis: Induktion über den Formelaufbau.
Man beachte, daß die Aussage für atomare Formeln nach Definition gilt.
Wir brauchen also nur Abschluß unter $\wedge$, $\neg$, $\exists$.

$\underline{\wedge}$: Ang. IV gilt für φ, ψ.

$\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \varphi([x_1]_U, \dots, [x_n]_U) \wedge \psi([x_1]_U, \dots, [x_n]_U)$

$\iff \mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \varphi([x_1]_U \dots [x_n]_U)$

Filtereig. (2) und $\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \psi([x_1]_U, \dots, [x_n]_U)$

$\overset{IV}{\iff} \underbrace{\{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \varphi(x_1(i), \dots, x_n(i))\}}_{A_\varphi =} \in U$

und $\underbrace{\{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \psi(x_1(i), \dots, x_n(i))\}}_{A_\psi =} \in U$

$\iff A_\varphi \cap A_\psi \in U$

$\iff \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \varphi(\dots) \text{ und } \mathfrak{A}_i \models \psi(\dots)\} \in U$

$\iff \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \varphi(\dots) \wedge \psi(\dots)\} \in U$.

$\underline{\neg}$: Ang. IV gilt für φ:

$\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \neg\varphi(\dots)$

$\iff \mathrm{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \not\models \varphi(\dots)$

$\overset{IV}{\iff} \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \varphi(\dots)\} \notin U$

! $\overset{\text{Ultra}}{\iff} \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \not\models \varphi(\dots)\} \in U$

$\iff \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \neg\varphi(\dots)\} \in U$.

$\underline{\underline{\exists}}$: IV gelte für φ

$\text{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \exists x \varphi(\ldots)$

$\Longleftrightarrow$ es ex. ein $w: \underline{I} \to \prod \underline{A_i}$ mit

$\text{Ult}(\mathfrak{A}_i, U) \models \varphi([w]_U, \ldots)$

$\overset{\text{IV}}{\Longleftrightarrow}$ es ex. ein w mit

$\{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \varphi(w, \ldots)\} \in U$

$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \{i \in I;$ es ex. $a \in A_i$ mit $\mathfrak{A}_i \models \varphi(a, \ldots)\} \in U$

$\Longleftrightarrow \{i \in I;\ \mathfrak{A}_i \models \exists x \varphi\} \in U$.

[__Bem.__ In der Rückrichtung von (*) haben wir das Auswahlaxiom verwendet, um die Auswahlfunktion w zu erzeugen.]

q.e.d.

__Korollar__ Falls $\text{Ult}(\mathfrak{A}, U)$ ein Ultraprodukt ist, so ist die Einbettung $\pi: A \to A^I/\sim_U$ eine elementare Einbettung.

Beweis $\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Longleftrightarrow$

z.z. $\mathrm{Ult}(\mathfrak{A}, U) \models \varphi([c_{a_1}], \dots, [c_{a_n}])$

$\{i \in I;\ \mathfrak{A} \models \varphi(c_{a_1}(i), \dots, c_{a_n}(i))\} = I$

$\Longleftrightarrow \{i \in I;\ \mathfrak{A} \models \varphi(c_{a_1}(i), \dots, c_{a_n}(i))\} \in U$

$\overset{\text{Łoś}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Ult}(\mathfrak{A}, U) \models \varphi([c_{a_1}], \dots, [c_{a_n}])$.

q.e.d.

§ 11 Anwendung von Ultrapotenzen in der Mengenlehre

Wie in GA #8 sei κ unerreichbar, also

$$\mathcal{V} := (V_\kappa, \in) \models \mathrm{ZFC}.$$

Sei I eine Indexmenge mit $|I| < \kappa$ und U ein Ultrafilter auf I

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \equiv \mathcal{V}$$

genauer

$$\pi : \mathcal{V} \longrightarrow \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$$
$$x \longmapsto [x]_U$$

ist eine elementare Einbettung.

Also: $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \mathrm{ZFC}$.

Wir versuchen, ein Gefühl für diese Struktur

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$$

zu bekommen.
Wann ist $[x]_U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$ eine Ordinalzahl?
Noch konkreter: was ist die leere Menge?

$$\uparrow$$

$$\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models x \text{ ist die leere Menge}$$

$$\iff \mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U) \models \boxed{\forall z\,(z \notin x)}$$

$$\underset{\text{Łoś}}{\iff} \underbrace{\{i \in I\,;\ \mathcal{V} \models \forall z\,(z \notin x(i))\}}_{\in U}$$

$$\iff \{i \in I\,;\ \mathcal{V} \models x(i) = \emptyset\} \in U.$$

Also $[x]_U$ ist die leere Menge gdw

$$x : I \longrightarrow V_\kappa$$

mit $\{i\,;\ x(i) = \emptyset\} \in U$.

$[x]_U$ ist Ordinalzahl in $\mathrm{Ult}(\mathcal{V}, U)$

$$\iff \{i \in I\,;\ x(i) \text{ ist Ordinalzahl}\} \in U.$$

OBdA kann ich annehmen, daß x für alle $i \in I$ eine Ordinalzahl annimmt.

Sei x eine beliebige Fkt

$$x: I \longrightarrow V_\kappa \quad \text{mit}$$

$A := \{i \in I;\ x(i) \text{ ist Ord.}\} \in U$.

Setze $\bar{x}: i \longmapsto \begin{cases} x(i) & \text{falls } i \in A \\ 0 & \text{falls } i \notin A \end{cases}$.

Dann gilt $\{i \in I;\ x(i) = \bar{x}(i)\} \supseteq A$

$\in U$.

Also $x \sim_U \bar{x} \Longrightarrow [x]_U = [\bar{x}]_U$.

Sei nun $[x]_U$ eine Ordinalzahl in $\mathrm{Ult}(V,U)$.

Da $|I| < \kappa$ ist $\{x(i);\ i \in I\} \subseteq \kappa$

mit Kard. $< \kappa$,

also wegen Regularität $\lambda := \sup\{x(i);\ i \in I\} < \kappa$

$$[x]_U \leq [c_\lambda]_U$$

da $\{i \in I;\ x(i) \leq c_\lambda(i) = \lambda\} = I$.