Modelle der Mengenlehre Vorlesung VI

08.12.20

Erinnerung:

- Für jede Limesordinalzahl $\lambda > \omega$ gilt, dass $V_\lambda \models Z$. Also $ZF \vdash \mathrm{Cons}(Z)$.
- Falls λ stark unerreichbar ist, so gilt, dass $V_\lambda \models ZF$. Also $ZF + $"$\exists \kappa$ κ stark unerreichbar" $\vdash \mathrm{Cons}(ZF)$
- Mit Gödels zweiten Unvollständigkeitssatz folgt, dass ZF die Existenz von unerreichbaren Kardinalzahlen nicht beweisen kann, außer ZF ist inkonsistent. $ZF \nvdash IC$

Wir schreiben IC für die Aussage "$\exists \kappa$ (κ ist regulärer starker Limes)".

Theorem Es gilt $ZF \nvdash IC$, außer ZF ist inkonsistent.

Erster Beweis Gödels 2. Unvollständigkeitssatz. □

Zweiter Beweis Angenommen, $ZF \vdash IC$. Dann gibt unerreichbare Kardinalzahlen. Sei c die kleinste. Dann gilt nach einem Theorem aus Vorlesung V, dass $V_c \models ZF$. Nach Annahme gilt sogar $V_c \models ZF + IC$.

Sei $\lambda < c$ die kleinste Ordinalzahl, sodass $V_c \models$ "λ unerreichbar". Nach Wahl von c kann λ nicht unerreichbar sein. Also ist λ singulär oder kein starker Limes.

Fall 1 λ singulär. Dann gibt es ein $\mu < \lambda$ und eine kofinale Funktion $f: \mu \to \lambda$. Es gilt $f \subseteq \mu \times \lambda$ und so $\varrho(f) \leq \varrho(\mu \times \lambda)$. Weiter gilt

$$\varrho(\mu \times \lambda) = \sup\{\varrho((\alpha,\beta)) + 1 : \alpha \in \mu, \beta \in \lambda\} = \sup\{\max(\alpha+2, \beta+2)+1 : \alpha \in \mu, \beta \in \lambda\}$$
$$= \sup\{\beta+3 : \beta \in \lambda\} = \begin{cases} \lambda & \lambda \text{ Limes} \\ \lambda+2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Also gilt $f \in V_{\lambda+2} \subseteq V_\kappa$. Somit gilt $V_\kappa \models$ "λ ist singulär" im Widerspruch zur Annahme.

Fall 2 λ ist kein starker Limes. Dann gibt es ein $\mu < \lambda$ und eine Surjektion $f: \mathcal{P}(\mu) \to \lambda$. Aber $f \in V_{\lambda+2} \subseteq V_\kappa$. Somit gilt, $V_\kappa \models$ "λ ist kein starker Limes" im Widerspruch zur Annahme. $\square$

Bemerkung Insbesondere gilt: falls κ die kleinste unerreichbare Kardinalzahl ist, so ist V_κ ein Modell von $ZF + \neg IC$. Also $ZF + IC \vdash \mathrm{Cons}(ZF + \neg IC)$.

§ 8 Andere große Kardinalzahlen und ihre Unerreichbarkeit.

Wir werden andere Typen von großen Kardinalzahlen ~~[illegible]~~ einführen, deren Definitionen, an sich nichts mit Unerreichbarkeit zu tun haben und zeigen, dass diese Eigenschaften implizieren, dass die Kardinalzahlen unerreichbar sind. Dies kann man als Evidenz werten, dass Unerreichbarkeit eine interessante Eigenschaft ist

<u>Erste Beispiel Messbarkeit</u>

<u>Definition</u> Ein <u>Filter</u> ~~a~~uf einer nicht-leeren Menge S ist eine Menge $F \subseteq \mathcal{P}(S)$ von Teilmengen von S sodass gilt:

(1) $S \in F$

(2) ist $X \in F$ und $X \subseteq Y \subseteq S$, so gilt $Y \in F$, und

(3) sind $X, Y \in F$, so gilt $X \cap Y \in F$.

Wir nennen einen Filter <u>echt</u> falls $\emptyset \notin F$.

Ein echter Filter F ist ein <u>Ultrafilter</u>, falls für alle $X \subseteq S$ gilt entweder $X \in F$ oder $S \setminus X \in F$.

<u>Beispiel</u>

1.) $\mathcal{P}(S)$ ist ein Filter, der unechte Filter.

2.) Sei $\emptyset \neq X \in S$. Dann ist $F_X := \{Y \subseteq S : X \subseteq Y\}$ ein Filter, der von X erzeugte <u>Hauptfilter</u>.

Ein Hauptfilter F_X ist ein Ultrafilter genau dann wenn $|X| = 1$.

Definition Ein Filter heißt <u>κ-vollständig</u> für eine Kardinalzahl κ, falls für alle $\lambda<\kappa$ und $\{X_\alpha : \alpha<\lambda\} \subseteq F$ gilt $\bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in F$.

Bemerkung Jeder Hauptfilter ist κ-vollständig für jedes κ.

Definition Eine Kardinalzahl κ heißt <u>messbar</u> falls es einen κ-vollständigen Ultrafilter auf κ gibt der kein Hauptfilter ist.

Bemerkung Dieser Begriff ist motiviert aus der Maßtheorie. Ein κ-vollständiger Ultrafilter U liefert uns ein $\{0,1\}$-wertiges Maß $\mu : \mathcal{P}(\kappa) \to 2$ durch

$$\mu(X) := \begin{cases} 1 & X \in U \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Maß ist σ-additiv: falls X_i abzählbar viele disjunkte Teilmengen von κ sind, so kann maximal eine Maß 1 haben. Also ist $\mu(\bigcup_{i\in\omega} X_i) = 1 \iff$ es gibt ein $i\in\omega$ mit $\mu(X_i)=1$ und somit $\mu(\bigcup_{i\in\omega} X_i) = \sum_{i\in\omega} \mu(X_i)$.

In der Maßtheorie untersucht man die Existenz von Maßen auf $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ und stellt fest, dass sich das Lebesgue-Maß nicht auf die gesamte Potenzmenge von $\mathbb{R}$ fortsetzen lässt. Messbare Kardinalzahlen sind eine Verallgemeinerung dieser Fragestellung.

Theorem (Ulam). Falls κ messbar ist, so ist κ unerreichbar.

Lemma Ein κ-vollständiger Ultrafilter der kein Hauptfilter ist enthält keine Mengen der Mächtigkeit $< \kappa$.

Beweis Sei U ein solcher Ultrafilter. Angenommen es gibt ein $X \in U$ mit $|X| < \kappa$. Sei $x \in X$. Dann gilt $S \setminus \{x\} \in U$, da sonst $U \supset F_{\{x\}}$. Somit gilt

$$S \setminus X = \bigcap_{x \in X} S \setminus \{x\} \in U.$$

Aber das ist ein Widerspruch. $\square$

Beweis des Theorems Sei κ eine messbare Kardinalzahl. Dann gibt es einen κ-vollständigen Ultrafilter $U \subseteq \mathcal{P}(\kappa)$ der kein Hauptfilter ist.

Angenommen, κ ist singulär. Dann gibt es eine $C \subseteq \kappa$ mit $|C| < \kappa$ und $\bigcup C = \kappa$. Da U κ-vollständig ist, muss es ein $\alpha \in C$ geben mit $\alpha \in U$. Aber dies ist ein Widerspruch zum Lemma. Also ist κ regulär.

Angenommen κ ist kein starker Limes. Dann gibt es ein $\lambda < \kappa$ und eine injektive Abbildung $f: \kappa \to 2^\lambda$.
Wir definieren für $\alpha < \lambda$, $i_\alpha \in 2$ als das eindeutige Element sodass

$$X_\alpha := \{\beta < \kappa : f(\beta)(\alpha) = i_\alpha\} \in \mathcal{U}$$

ist. Dann ist $X := \bigcap_{\alpha<\lambda} X_\alpha \in \mathcal{U}$ und für alle $\beta \in X$ gilt $f(\beta)(\alpha) = i_\alpha$ für alle $\alpha < \lambda$.
Also ist X einelementig. Aber dies ist ein Widerspruch. Somit ist κ ein starker Limes. $\square$

<u>Zweites Beispiel Partitionsrelation</u>

<u>Definition</u> Sei X eine Menge. Wir schreiben $[X]^2$ für die Menge aller zweielementigen Teilmengen von X.
Eine Abbildung $c: [X]^2 \to 2$ heißt <u>(bichromatische) Färbung</u> von X. Wir nennen 0 und 1 die "Farben" und sagen "(x,y) erhält Farbe 0" falls $c(x,y) = 0$.
Eine Menge $H \subseteq X$ heißt <u>c-homogen</u>, falls alle Paare $(x,y) \in [H]^2$ unter c die gleiche Farbe haben.
Falls κ eine Kardinalzahl ist, so schreiben wir

$$\kappa \to (\kappa)^2_2 \qquad \text{Sprich: "}\kappa\text{ Pfeil }\kappa\text{ zwei zwei"}$$

für die Aussage "für jede Färbung $c: [\kappa]^2 \to 2$ gibt es eine c-homogene Menge der Kardinalität κ".
Wir sagen auch κ ist <u>schwach kompakt</u>.

Bemerkung 1 Dieser Begriff stammt aus der unendlichen Ramsey-Theorie: der Satz von Ramsey sagt gerade, dass $\aleph_0$ schwach kompakt ist.

Bemerkung 2 Der Name "schwach kompakt" kommt aus der Modelltheorie. Man kann zeigen, dass diese Eigenschaft äquivalent zu einem schwachen Kompaktheitssatz für eine infinitäre Sprache ist.

Theorem (Erdős). Jede überabzählbare, schwach kompakte Kardinalzahl ist unerreichbar.

Beweis Sei $\kappa > \omega$ und $\kappa \to (\kappa)^2_2$. Wir zeigen als erstes, dass κ regulär ist. Angenommen κ ist singulär. Dann gibt es ein $\lambda < \kappa$ und eine Folge $\langle X_\gamma : \gamma < \lambda \rangle$ paarweiser disjunkter Teilmengen von κ sodass $|X_\gamma| < \kappa$ für alle $\gamma < \kappa$ und $\bigcup_{\gamma<\lambda} X_\gamma = \kappa$ gilt.

Sei $c : [\kappa]^2 \to 2$ definiert durch

$$c(\alpha,\beta) = 0 \iff \alpha \text{ und } \beta \text{ sind in gleichem } X_\gamma.$$

Dann gibt es eine c-homogene Menge $H \subseteq \kappa$ mit $|H| = \kappa$. Die Paare aus H können nicht Farbe 0 haben, denn sonst gäbe es ein $\gamma < \lambda$ mit $|X_\gamma| \geq \kappa$. Aber die Paare können auch nicht Farbe 1 haben, da $\lambda < \kappa$. Also muss κ regulär sein.

Angenommen κ ist kein starker Limes. Dann gibt es ein $\lambda < \kappa$ mit $2^\lambda \geq \kappa$ und so gibt es eine Teilmenge $X \subseteq \mathcal{P}(\lambda)$, die in Bijektion zu κ steht. Solch eine Bijektion gibt uns eine Aufzählung $X = \{X_\alpha : \alpha < \kappa\}$. Hierbei sind die $X_\alpha \subseteq \lambda$ und paarweise verschieden.

Wir definieren eine Ordnung auf $\mathcal{P}(\lambda)$. Für $A, B \subseteq \lambda$ gilt: wenn $A \neq B$, so gibt es ein kleinstes α mit $\alpha \in A \setminus B$ oder $\alpha \in B \setminus A$. Wir sagen

$$A \lhd B \iff \alpha \in B \setminus A.$$

<u>Lemma</u> Es gibt keine strikt $\lhd$-aufsteigende Folge der Länge λ^+; genauso es gibt keine strikte $\lhd$-absteigende Folge der Länge λ^+.

Angenommen wir haben das Lemma bewiesen. Sei $c : [\kappa]^2 \to 2$ definiert durch

$$c(\alpha,\beta) := \begin{cases} 0 & \alpha < \beta \iff X_\alpha \lhd X_\beta \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da κ schwach kompakt ist, gibt es eine c-homogene Menge $H \subseteq \kappa$ der Kardinalität κ. Seien $\langle \eta_\xi : \xi < \lambda^+ \rangle$ die ersten λ^+-vielen Elemente aus H, wobei η_ξ das ξ-te Element aus H ist.

Falls die Paare aus H Farbe 0 haben, so ist $\langle X_{\eta_\xi} : \xi < \lambda^+ \rangle$ eine strikt $\lhd$-aufsteigende Folge der Länge λ^+. Aber dies ist ein Widerspruch zum Lemma.

Falls die Paare Farbe 1 haben, bekommen wir eine strikt $\lhd$-absteigende Folge.

<u>Beweis des Lemmas</u> Sei $\langle A_\xi : \xi < \lambda^+ \rangle$ eine solche Folge. Wir zeigen, dass es für jedes $\alpha < \lambda$ ein $\xi_\alpha < \lambda^+$, sodass für alle $\xi, \eta > \xi_\alpha$ gilt, dass $\alpha \in A_\xi \Leftrightarrow \alpha \in A_\eta$. Angenommen nicht. Sei α ein minimales Gegenbeispiel. Dann gibt es für alle $\beta < \alpha$ ein solches ξ_β. Da λ^+ regulär ist, gilt $\xi^*_\alpha := \sup(\xi_\beta : \beta < \alpha) < \lambda^+$. Seien $\xi^*_\alpha < \xi < \eta$ sodass $\alpha \in A_\xi$ und $\alpha \notin A_\eta$. Dann ist α das kleinste Element in dem sich A_ξ und A_η unterscheiden und somit gilt $A_\eta < A_\xi$. Aber dies ist ein Widerspruch und somit ist α kein Gegenbeispiel.

Aber nun gilt, wegen der Regularität von λ^+, dass $\xi^* := \sup(\xi_\alpha : \alpha < \lambda) < \lambda^+$. Aber das bedeutet, dass alle A_ξ oberhalb von ξ^* identisch sind.

$\square$
$\square$

<u>Bemerkung</u> Jede messbare Kardinalzahl ist schwach kompakt.