MODELLE DER MENGENLEHRE
WINTERSEMESTER 2020/21

1. Dezember 2020

VORLESUNG $\underline{V}$

$\boxed{\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha)}$

§ 7 Die kumulative Hierarchie

von Neumann

$$V_0 := \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} := \wp(V_\alpha)$$
$$V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha$$

$\rho(x) := \alpha \iff x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$

MIRIMANOFF-RANG

$$\rightarrow \rho(x) = \sup\{\rho(y)+1 \,;\, y \in x\} = \bigcup\{\rho(y)+1 \,;\, y \in x\}$$
$$V_\alpha = \{x \,;\, \rho(x) < \alpha\}$$

Ränge ausrechnen:

$x, y \quad \rho(x) = \alpha$
$\qquad\quad \rho(y) = \beta$

$$\rho(\{x\}) = \sup\{\rho(y)+1 \,;\, y \in \{x\}\}$$
$$= \rho(x)+1 = \alpha+1$$

$$\rho(\{x,y\}) = \sup\{\rho(z)+1 \,;\, z \in \{x,y\}\}$$
$$= \max(\alpha+1, \beta+1)$$

$$\rho((x,y)) = \rho(\{\underbrace{\{x\}}, \underbrace{\{x,y\}}\})$$
$$= \max(\alpha+2, \max(\alpha+1, \beta+1)+1)$$

$= \max(\alpha+2, \beta+2)$

Weitere Beispiele

$$\mathbb{N} = \omega = \mathrm{Ord} \cap V_\omega$$
$$\subseteq V_\omega$$
$$\omega \in V_{\omega+1} \qquad \rho(n) = n$$

$$\rho(\mathbb{N}) = \omega$$

$$\rho(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) = \sup\{\rho(\underline{(n,m)})\,;\ n,m \in \mathbb{N}\}$$
$$= \sup\{\max(n+2, m+2)\,;\ n,m \in \mathbb{N}\}$$
$$= \omega.$$

KOROLLAR

Falls λ eine Limesordinalzahl ist und $\underline{x,y \in V_\lambda}$, so ist $\underline{\{x,y\} \in V_\lambda}$ und $(x,y) \in V_\lambda$.

Hoffnung: Heißt dies, daß die V_λ Modelle des Paarmengenaxioms sind?

$$V_\lambda \models \forall x\, \forall y\, \exists p\, \forall z\, (z \in p \leftrightarrow z = x \lor z = y)$$

Wähle $p = \{x,y\}$. Dies ist möglich nach Korollar.

Korollar Falls λ Limes, so gilt:

$$V_\lambda \models \text{Paar}.$$

Lemma Falls X eine beliebige transitive Menge ist, so gilt

$$(X, \in) \models \text{Extensionalität}.$$

Beweis

EXTENSIONALITÄT

$$\forall x \forall y \left(x = y \longleftrightarrow \forall z \left(z \in x \longleftrightarrow z \in y\right)\right)$$

$\longrightarrow$

$\overset{!}{\longleftarrow}$

Ang. $(X, \in) \models \forall z\,(z \in x \longleftrightarrow z \in y)$

$x, y \in X$

$$\forall z\,(z \in X \longrightarrow (z \in x \longleftrightarrow z \in y))$$

Wegen der Transitivität von X erhalten wir

$$\forall z\,(z \in x \longleftrightarrow z \in y).$$

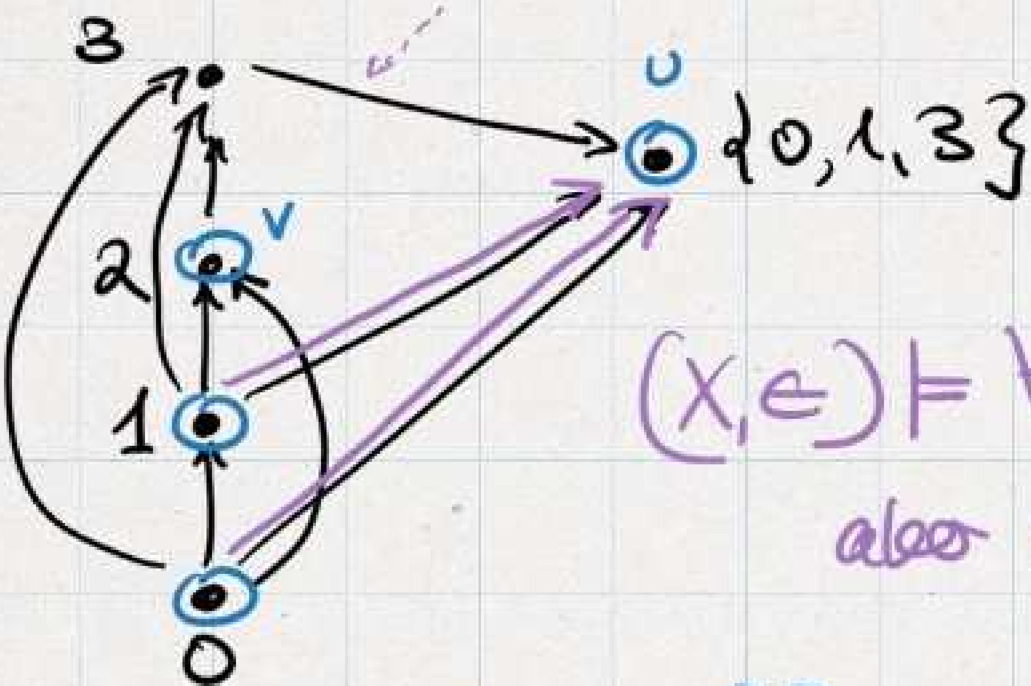
$\overset{\text{Extensionalität}}{\Longrightarrow} \quad x = y.$

q.e.d.

Instruktives Gegenbsp.

$$X = \{0, \underset{\{0\}}{\overset{}{\underset{\shortparallel}{1}}}, \underset{\{0,1\}}{\underset{\shortparallel}{2}}, \{0,1,3\}\}$$

In $(X,\in)$ ist sowohl 2 als auch $\{0,1,3\}$ ein Paar für 0 und 1.



$$(X,\in) \models \forall z\,(z\in u \longleftrightarrow z \in v)$$

aber $u \neq v$.

Elemente von X

D.h. $(X,\in) \not\models$ Extensionalität.

Bemerkung Falls X transitiv ist und $(X,\in) \models$ Paar mit

$$(X,\in) \models \forall z\,(z\in p \longleftrightarrow z = x \lor z = y)$$

Dann gilt $p = \{x,y\}$.

[Falls $a \in p \longrightarrow a \in X$ wg. Transitivität.]

Bisher Falls λ Limes, so $V_\lambda \models$ Ext + Paar.

Berechnen weiterer Ränge:

$$\rho(x) = \alpha$$

$$\rho(\bigcup x) \; ?$$

$$\bigcup x = \{z ;\ \exists y\,(\underbrace{y \in x}_{\boxed{\rho(y) < \rho(x)}} \wedge \underbrace{z \in y}_{\boxed{\rho(z) < \rho(y)}})\}$$

$\rho(y)+1 \leq \rho(x)$ $\qquad$ $\rho(z)+1 \leq \rho(y)$

$$\rho(\bigcup x) = \sup\{\rho(z)+1 ;\ \exists y \in x\ z \in y\}$$

$$\rho(\bigcup x) \leq \alpha.$$

[genauer: wenn α Limes, so $\rho(\bigcup x) = \alpha$
wenn $\underset{\beta+1}{\underset{\|}{\alpha}}$ NF, so $\rho(\bigcup \alpha) = \beta < \alpha$.]

Korollar Falls λ beliebig und $x \in V_\lambda$, so ist $\bigcup x \in V_\lambda$.

Korollar Falls λ Limes, so
$V_\lambda \models$ Ext + Paar + Vereinigung.

POTENZMENGE

$$\rho(x) = \alpha$$

$$\rho(\wp(x)) \ ?$$

[Falls $y \subseteq x$, $\rho(y) \leq \rho(x)$

$$\rho(\wp(x)) = \sup\{\rho(y)+1 \ ; \ y \subseteq x\}$$

$$\underset{=}{\cancel{\leq}} \ \alpha + 1 .$$

[weil $x \in \wp(x)$ und $\rho(x) = \alpha$]

KOROLLAR Falls λ limes, so ist

$$V_\lambda \models \text{Ext} + \text{Paar} + \text{Vereinigung} + \text{Potenzm.}$$

[Man beachte, daß die Potenzmenge einer Menge in V_λ immer die "echte" Potenzmenge ist, daß jede TM $y \subseteq x$ bereits in V_λ liegt.]

AUSSONDERUNG

Für jede Formel φ und Parameter $\vec{p}$

$$\forall \underline{x} \ \exists a \ \forall z \ (z \in a \longleftrightarrow \varphi(z, \underline{\vec{p}}))$$

Falls wir wollen, daß die φ-Instanz von Aussonderung in V_λ gilt (für $x, \vec{p}$), dann brauchen wir:

$$x_\varphi := \underbrace{\{ z \in x ; \underbrace{(V_\lambda, \in) \models \varphi(z, \vec{p})}\}}$$

$$x_\varphi \subseteq x$$

$$\rho(x_\varphi) \leq \rho(x)$$

$$\Longrightarrow x \in V_\lambda \longrightarrow x_\varphi \in V_\lambda . \quad (*)$$

<u>Bemerkung 1.</u> Es gibt hier ein potentielles Problem mit der <u>Absolutheit</u> von Formeln. Es kann nämlich sein, daß

$$\{ z \in x ; \varphi(z, \vec{p}) \} \neq \{ z \in x ; (V_\lambda, \in) \models \varphi(z, \vec{p}) \}$$

Eine Formel heißt <u>absolut</u> <u>zwischen</u> <u>Modellen</u> $M \subseteq N$ falls für alle $z \in M$

$$M \models \varphi(z) \Longleftrightarrow N \models \varphi(z) .$$

Viele Formeln sind nicht absolut.

<u>Bemerkung 2</u> Dieses potentielle Problem verschwindet hier, daß wir nicht wissen müssen, was $\{ z \in x ; (V_\lambda, \in) \models \varphi(z, \vec{p}) \}$ ist, sondern nur $x_\varphi \subseteq x$.

<u>KOROLLAR</u> Falls λ Limes, $V_\lambda \models FST$.

<u>Bemerkung 3</u> Um x_φ auszusondern verwenden wir nicht φ, sondern

$$\Phi(z,\vec{p}) := \underline{(V_\lambda, \in)} \models \varphi(z,\vec{p})$$

Warum ist dies eine Formel?
Diese Formel ist eine rekursive Definition, bei der der Existenzquantorfall durch

$$\exists x \in V_\lambda \;\ldots$$

interpretiert wird.

UNENDLICHKEIT
Falls $\boxed{\mathbb{N} \in V_\alpha}$, so gilt

$$V_\alpha \models \mathbb{N} \text{ ist eine induktive Menge}$$

$$\Longrightarrow V_\alpha \models \text{Unend}.$$

Wie vorher bemerkt:

$$\mathbb{N} \in V_{\omega+1} \setminus V_\omega.$$

<u>KOROLLAR</u> Falls $\lambda > \omega$ Limes ist, so ist $V_\lambda \models Z$.

wobei $Z = \text{Ext} + \text{Paar} + \text{Ver} + \text{Aus} + \text{Unend} + \text{Pot}$.

METAMATHEMATISCHE KONSEQUENZ

$ZF \vdash$ es ex. ein Modell von Z

Welches? z.B. $V_{\omega+\omega}$.

$\exists X \; \underbrace{(X, \in) \models Z}_{\text{rekursive Def.}}$

Aber nach dem Gödelschen Vollständigkeitssatz gilt:

"es ex. ein Modell von Z"

$\Longleftrightarrow$

$\underbrace{Z \text{ ist widerspruchsfrei}}_{Cons(Z)}$

$ZF \vdash Cons(Z).$

Der 2. Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt:

$Z \nvdash Cons(Z)$

[oder Z ist inkonsistent]

$\Longrightarrow$ ZF ist strikt stärker als Z.

Mit anderen Worten: das Ersetzungsaxiom folgt nicht aus den andren Axiomen [oder Z ist inkonsistent].

ERSETZUNG

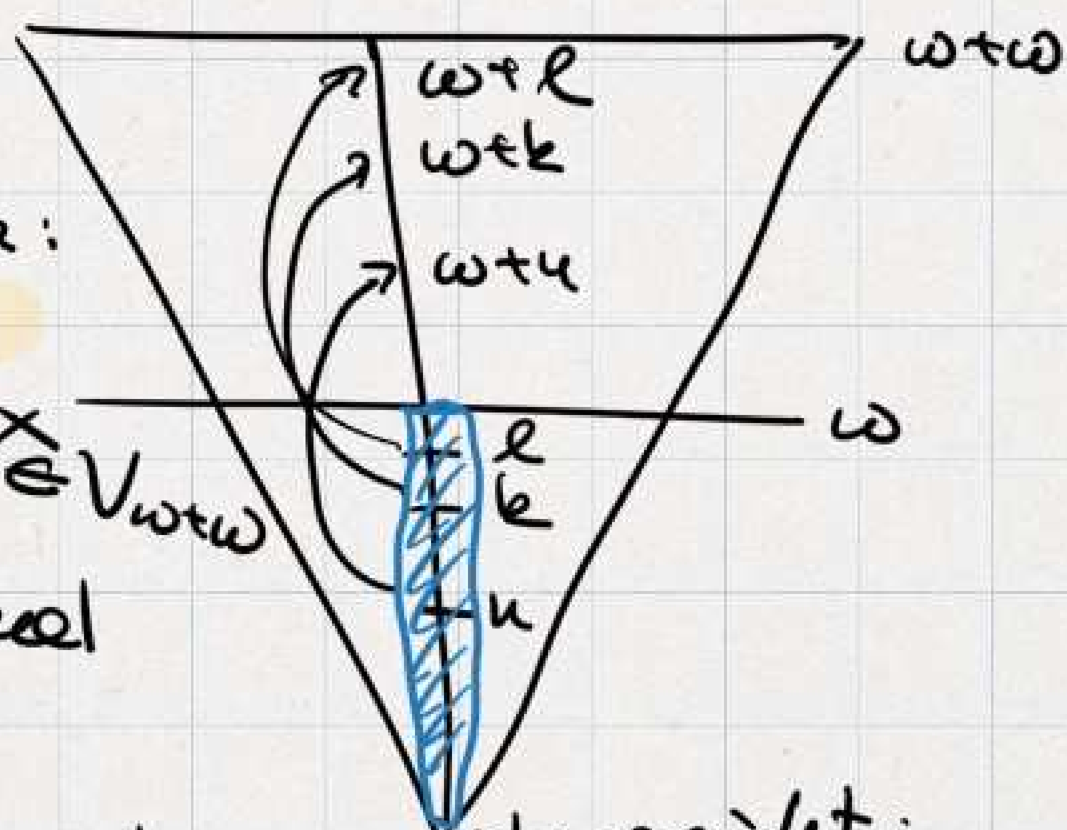
Abstrakt metamathematisch wissen wir bereits, daß wir nicht erwarten können, daß auf irgendeiner von Neumannstufe in ZF das Ersetzungsaxiom beweisbar wäre:

$$\text{Ang. } ZF \vdash \text{"} V_\lambda \models \text{Ersetzung"}$$
$$\Longrightarrow ZF \vdash \exists M \text{ "} M \models ZF \text{"}$$
$$\Longrightarrow ZF \vdash \mathrm{Cons}(ZF)$$
$$\overset{2.G}{\underset{\text{U.w.s.}}{\Longrightarrow}} ZF \text{ ist inkonsistent.}$$

Aber nun konkret:

$V_{\omega+\omega}$

Ersetzung würde heißen: für jede Fkt. Formel φ und jede Menge $x \in V_{\omega+\omega}$ ist der Bildbereich von x unter der Formel auch in $V_{\omega+\omega}$.



Bsp. einer Funktion, die diesem widerspricht:

$$F(n) := \omega + n.$$

Betrachten wir

$$R := \{F(n);\ n \in \mathbb{N}\}$$

$$\begin{aligned}\rho(R) &= \sup\{\rho(F(n));\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\rho(\omega+n);\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\omega+n;\ n\in\mathbb{N}\} \\ &= \omega+\omega\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow R \notin V_{\omega+\omega}.$$

Wie konstruieren wir aus dieser Idee einen Widerspruch zum Ersetzungsaxiom:

$$\varphi_1(x,y) :\Longleftrightarrow \underbrace{x\in\mathbb{N} \wedge y = \omega+x}.$$

Warum ist dies eine Formel in der Sprache der ML

$\longrightarrow$ REKURSIONSSATZ.

Falls Ersetzung in $V_{\omega+\omega}$ gilt, so können wir Ersetzung auf φ_1 und $\mathbb{N}\in V_{\omega+\omega}$ anwenden, um die Menge R zu erhalten. Aber $R\notin V_{\omega+\omega}$. Widerspruch!

Das gleiche Argument funktioniert für

$V_{\omega\cdot 3}$ mit $\varphi_2(x,y) \Longleftrightarrow x\in\mathbb{N} \wedge y = \omega\cdot 2+x$

$V_{\omega\cdot(n+1)}$ mit $\varphi_n(x,y) \Longleftrightarrow x\in\mathbb{N} \wedge y = \omega\cdot n+x.$

V_{ω^2} mit $\varphi_{00}(x,y) = x \in \mathbb{N} \wedge y = \omega \cdot x$

usw.

ZUSAMMENFASSENDE BEMERKUNG:

Der Grund, warum $V_{\omega+\omega}$ kein Modell von Ersetzung ist, ist:

$\boxed{\text{es gibt eine } \underline{\text{definierbare}} \text{ Funktion } F: x \longrightarrow V_{\omega+\omega} \text{ mit } x \in V_{\omega+\omega}\text{, so daß die Ränge der } F\text{-Bilder von } y \in x \text{ unbeschränkt in } \omega+\omega \text{ sind.}}$

Was ist mit $V_{\aleph_1}$?

[Hier kann es, wg. der Regularität von $\aleph_1$ keine unbeschränkte Fkt. von $\mathbb{N}$ nach $\aleph_1$ geben!]

Idee: Der Beweis des Satzes von Hartogs gibt uns eine definierbare Surjektion von $\wp(\mathbb{N}) \times \wp(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$ nach $\aleph_1$.

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \in V_{\omega+5} \subseteq V_{\aleph_1}.$$

HA: Rechnen Sie den Rang genau aus!

$$X \subseteq \mathbb{N} \qquad R \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$$

$(X,R) \xrightarrow{\text{Fall 1}} (X,R)$ ist Wohlordnung

Dann ex. eindeutig best. Ordinalzahl $\alpha < \aleph_1$ mit $(\alpha,\in) \cong (X,R)$

$(X,R) \xrightarrow{\text{Fall 2}}$ nicht.

$$F: \boxed{(X,R) \mapsto \begin{cases} \alpha & \text{Fall 1} \\ 0 & \text{Fall 2} \end{cases}}$$

Für jedes $\alpha < \aleph_1$ ex. eine (X,R) mit $(X,R) \cong (\alpha,\in)$.

D.h. $\{F(X,R) \mid X\subseteq\mathbb{N}, R\subseteq\mathbb{N}\times\mathbb{N}\} = \aleph_1$.

Wir können also die folgende funktionale Formel betrachten:

$$\psi(x,y) :\Longleftrightarrow x = (X,R) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \times \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N}) \text{ und } y = F(x)$$

Dieser Beweis kann leicht verallgemeinert werden zu:

<u>Theorem</u> Falls κ eine Nachfolger-kardinalzahl $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ ist, so ist $V_\kappa \not\models$ Ersetzung.

[Beweis. Wie eben nur mit $\aleph_\alpha$ statt $\mathbb{N}$.]

<u>FRAGE</u> Was gilt, falls κ eine Limeskardinalzahl ist.

<u>Theorem</u> Falls κ stark unerreichbar ist, so gilt $V_\kappa \models$ Ersetzung.

<u>Insbesondere</u>: $V_\kappa \models ZF$.

[Metamathematische Bemerkung:

$$\Longrightarrow \quad ZF \nvdash \exists \kappa \quad \kappa \text{ stark unerreichbar},$$

oder ZF ist widersprüchlich.]

Lemma κ sei stark unerreichbar [regulär + starker Limes]
Dann gilt:

(1) $\alpha < \kappa \Longrightarrow |V_\alpha| < \kappa$

(2) $x \subseteq V_\kappa$:

$$x \in V_\kappa \Longleftrightarrow |x| < \kappa.$$

Beweis (1) Induktion nach α:

$|V_0| = 0 < \kappa$.

Falls $|V_\alpha| < \kappa$, so ist

$$|V_{\alpha+1}| = |\mathcal{P}(V_\alpha)| = 2^{|V_\alpha|} < \kappa.$$

Falls λ Limes, $\lambda < \kappa$ und für alle $\alpha < \lambda$ $|V_\alpha| < \kappa$

$$|V_\lambda| = \Big|\bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha\Big| < \kappa$$ nach Regularität von κ.

(2) $\Longrightarrow$ folgt direkt aus (1)

$\Longleftarrow$ sei $x \subseteq V_\kappa$, $|x| < \kappa$.

$A := \{\rho(y) ; y \in x\} \subseteq \kappa \qquad |A| \le |x|$

$\xRightarrow{\text{Regularität von } \kappa} \alpha = \bigcup A < \kappa \Rightarrow x \in V_{\alpha+1} \subseteq V_\kappa$.

q.e.d.

KONSEQUENZ:

Um zu zeigen, daß $x \in V_\kappa$ reicht es aus zu zeigen:

$$\boxed{x \subseteq V_\kappa \;\&\; |x| < \kappa.} \quad (*)$$

BEWEIS DES THEOREMS.

Wir zeigen sogar stärker:

$$F : V_\kappa \longrightarrow V_\kappa \text{ beliebig}$$

und $x \in V_\kappa$, dann ist

$$R := \{F(y) \,;\, y \in x\} \in V_\kappa.$$

Betrachte R: nach Ann. $R \subseteq V_\kappa$

$$\left.\begin{array}{l} |R| \leq |x| \\ x \in V_\kappa \underset{\text{Lemma (2)}}{\Longrightarrow} |x| < \kappa \end{array}\right\} |R| < \kappa$$

$$\overset{(*)}{\Longrightarrow} R \in V_\kappa.$$

q.e.d.

Dieser Beweis zeigt mehr als er soll!