# Modelle der Mengenlehre

## VORLESUNG IV

24. November 2020

## §6 Konfinalität

ERINNERUNG: $\lambda$ Limesordinalzahl

$$\mathrm{cf}(\lambda) = \min \{\kappa ; \exists C \subseteq \lambda \text{ konfinal mit } |C| = \kappa\}$$

$$= \min \{\alpha ; \exists f : \alpha \longrightarrow \lambda \text{ konfinal}\}$$

$$= \min \{\alpha ; \exists f : \alpha \longrightarrow \lambda \text{ konfinal und strikt monoton}\}$$

$$\boxed{\mathrm{cf}(\lambda) \leq \lambda}$$

$\lambda$ heißt REGULÄR falls $\mathrm{cf}(\lambda) = \lambda$; sonst SINGULÄR.

Aus §1: Alle Nachfolgerkardinalzahlen sind regulär. (ZFC! AC!)

Die "meisten" Limeskardinalzahlen (z.B. $\aleph_\omega, \aleph_{\omega \cdot 2}, \ldots$) sind singulär.

**Proposition** Falls $\lambda$ Limesordinalzahl, so ist
$$\mathrm{cf}(\lambda) = \mathrm{cf}(\aleph_\lambda).$$

$$\left[\mathrm{cf}(\aleph_\omega) = \aleph_0 = \omega\ ;\quad \mathrm{cf}(\aleph_{\omega\cdot 2}) = \aleph_0\right]$$

**Beweis** Die Abbildung
$$\alpha \longmapsto \aleph_\alpha$$
$$\lambda \longrightarrow \boxed{\aleph_\lambda = \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha}$$
ist konfinal in $\aleph_\lambda$.

Falls $g: \mu \longrightarrow \lambda$ konfinal, so ist
$$f\circ g: \mu \longrightarrow \aleph_\lambda \text{ konfinal.}$$
$$\underset{=\,\underline{\mathrm{cf}(\lambda)}}{\min\{\mu;\ \exists f: \mu \to \lambda\}} \geqq \underset{=\,\underline{\mathrm{cf}(\aleph_\lambda)}}{\min\{\mu;\ \exists f: \mu \to \aleph_\lambda\}}$$

Was bleibt zu zeigen:
$$\mathrm{cf}(\lambda) \leqslant \mathrm{cf}(\aleph_\lambda)$$
Sei $f: \mu \longrightarrow \aleph_\lambda$ konfinal.
und konstruiere
$$\hat{f}: \mu \longrightarrow \lambda. \qquad \hat{f}(\alpha) := \gamma.$$
$$\alpha\in\mu \longmapsto f(\alpha) \in \aleph_\lambda. \qquad \text{Finde } \gamma \text{ minimal, s.d. } f(\alpha) \in \aleph_\gamma.$$

Beh: $\hat{f}$ ist konfinal

$$\begin{aligned} f &: \mu \longrightarrow \aleph_\lambda \\ \hat{f} &: \mu \longrightarrow \lambda \\ & \quad \alpha \longmapsto \gamma \quad \text{mit } \gamma \text{ minimal} \\ & \qquad\qquad \text{s.d. } f(\alpha) \in \aleph_\gamma \end{aligned}$$

Sei also nun $\beta \in \lambda$ beliebig.
Finde $\alpha^* \in \mu$ mit $f(\alpha^*) > \aleph_\beta$.
[ex. wg. Konfinalität von $f$.]

Also ist $\hat{f}(\alpha^*) > \beta$.
Also ist $\hat{f}$ konfinal. q.e.d.

---

**Bsp.** $$\mathrm{cf}(\underline{\aleph_{\aleph_1}}) = \mathrm{cf}(\aleph_1) = \underline{\aleph_1}$$

SINGULÄRE KARDINALZAHL MIT ÜBERABZÄHLBARER KONFINALITÄT.

Falls $\kappa$ beliebige Kardinalzahl

$$\mathrm{cf}(\aleph_\kappa) = \mathrm{cf}(\kappa).$$

Kann es sein, daß $\aleph_\kappa = \kappa$ ?
Und gleichzeitig $\mathrm{cf}(\kappa) = \kappa = \aleph_\kappa$ ?

**Definition** Sei $F : \mathrm{Ord} \longrightarrow \mathrm{Ord}$ eine Ordinalzahloperation, d.h. eine funktionale Formel, die Ordinalzahlen Ordinalzahlen zuweist und deren Anfangssegmente Funktionen sind.

F heißt NORMAL falls

(a) F ist monoton:

$$\alpha < \beta \Longrightarrow F(\alpha) < F(\beta)$$

$$\left[\Longrightarrow \forall \alpha \;\; \alpha \leq F(\alpha)\right]$$

gilt grundsätzlich für Wohlordnungen (*)

(b) F ist stetig:

für $\lambda$ Limesord.z.

$$F(\lambda) = \bigcup_{\alpha < \lambda} F(\alpha).$$

**Theorem** Jede normale Operation hat beliebig große Fixpunkte:

$$\forall \alpha \, \exists \beta \geq \alpha \quad F(\beta) = \beta.$$

**Beweis** Sei $\alpha$ beliebig.

Falls $\alpha$ Fixpunkt ist, so ist nichts zu zeigen.

Also oBdA $F(\alpha) \neq \alpha$

$$\Longrightarrow F(\alpha) > \alpha.$$

Dann def. rekursiv:

$$\alpha_0 := \alpha$$

$$\alpha_{i+1} := F(\alpha_i)$$

$$\boxed{\alpha_\infty := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i}$$

$\{\alpha_i ; i \in \mathbb{N}\} \subseteq \alpha_\infty$ konfinale Teilmenge

$$\alpha_1 = F(\alpha_0) = F(\alpha) > \alpha = \alpha_0 \Longrightarrow \underbrace{F(\alpha_0)}_{= \alpha_1} < \underbrace{F(\alpha_1)}_{= \alpha_2}$$

Die $\alpha_i$ sind eine strikt monotone Folge, also ist $\alpha_\infty$ eine Limesordinalzahl.

Beh. $F(\alpha_\infty) = \alpha_\infty$.

$\geq$ klar. nach (*)

$\leq$ Zeige $F(\alpha_\infty) \subseteq \alpha_\infty$. Sei

$$\beta \in F(\alpha_\infty) \overset{\text{Limes stetig}}{=} \bigcup_{\alpha < \alpha_\infty} F(\alpha) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} F(\alpha_i) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_{i+1}$$

$\Longrightarrow \beta \in \alpha_{i+1} \subseteq \alpha_\infty$ für ein $i$. q.e.d.

<u>Bemerkung 1</u> $\alpha_\infty$ ist der kleinste F-Fixpunkt oberhalb von $\alpha$:

Ang. $\alpha < \underline{\beta < \alpha_\infty}$
mit $\beta = F(\beta)$. (*)

Finde $i$, so daß

$$\underline{\alpha_i < \beta \leq \alpha_{i+1}}$$

$$\underline{\alpha_{i+1}} = F(\alpha_i) \leq F(\beta) \overset{*}{=} \underline{\beta}$$

$\Longrightarrow \alpha_{i+1} < \beta$. Widerspruch!

<u>Bemerkung 2</u> $cf(\alpha_\infty) = \aleph_0$.

Der kleinste F-Fixpunkt hat Konfinalität $\aleph_0$.

<u>Beispiele</u> Aleph-Operation:

$$\aleph_0 := \omega$$
$$\aleph_{\alpha+1} := \underline{\aleph(\aleph_\alpha)}$$
$$\underline{\aleph_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha} \quad [\lambda \text{ Limes}]$$

Nach Def. ist die Operation normal, also nach Thm gibt es beliebig viele Fixpkt.

Wende den Beweis auf

$$\xi \longmapsto \aleph_\xi \quad \text{an:}$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\boxed{\alpha = 0}$ | $\alpha_0 = 0$ | $1$ | $\omega$ |
| $\alpha = 1$ | $\alpha_1 = \aleph_0$ | $\aleph_1$ | $\aleph_\omega$ |
| $\alpha = \omega$ | $\alpha_2 = \aleph_\omega$ | $\aleph_{\aleph_1}$ | $\aleph_{\aleph_\omega}$ |
| | $\alpha_3 = \aleph_{\aleph_\omega}$ | $\aleph_{\aleph_{\aleph_1}}$ | $\aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}$ |
| | $\alpha_4 = \aleph_{\aleph_{\aleph_\omega}}$ | | |

usw.

$$\underline{\alpha_\infty} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \alpha_i$$

Aleph-Fixpunkte sind ziemlich große Kardinalzahlen, aber die meisten, die wir finden, haben abzählbare Konfinalität.

## Nochmals §1

**Def.** Eine Kardinalzahl $\kappa$ heißt starker Limes falls $\forall \lambda < \kappa \; (2^\lambda < \kappa)$.

**Bem.** Jeder starke Limes ist ein Limes.

Def. $\kappa$ heißt SCHWACH UNERREICHBAR falls $\kappa$ reguläre Limeskardinalzahl ist und (STARK) UNERREICHBAR falls $\kappa$ regulärer starker Limes ist.

Proposition Falls $\kappa$ schwach unerreichbar ist, so ist $\kappa$ ein Aleph-Fixpunkt.

Beweis $\kappa$ ist regulär und $\boxed{\text{Limes}}$

$\underline{\kappa = \aleph_\lambda}$ für irgendein $\lambda$.

Wollen zeigen: $\lambda = \kappa$.

Limeskard. impliziert $\lambda$ Limesordinalzahl.

Also nach unserer Proposition:

$$cf(\kappa) = cf(\aleph_\lambda) = cf(\lambda).$$

Falls $\lambda < \kappa \implies$

$$\underline{cf(\kappa)} = cf(\lambda) \leq \lambda < \underline{\kappa}$$

Also wäre $\kappa$ nicht regulär.

$\implies \lambda = \kappa$. q.e.d

**Bem.** Unsere Konstruktion verlangt, daß wir erst vorgeben, wie lang wir $F$ iterieren und damit die Kofinalität des Fixpunkts vorgeben und dann den Fixpunkt bestimmen, der im Regelfall deutlich höher liegen wird als diese Kofinalität.

---

**Frage** Können wir zeigen, daß alle Fixpunkte Kofinalität $\aleph_0$ haben? (bis auf Pathologien)

Dies ist sicherlich der Fall für einen Fixpunkt $\alpha$, so daß ein Fixpunkt $\beta$ ex. mit

$$\beta < \alpha$$

und keine Fixpunkte ex. zw. $\beta$ und $\alpha$.

Was passiert, falls $Z$ mit $|Z| = \aleph_1$, $Z$ besteht aus Fixpunkten und $Z$ hat kein größtes Element:

$\xi := \bigcup Z$ ist selbst ein Fixpunkt.

[Vgl. Gruppenarbeit #4]

Für starke unerreichbare Kardinalzahlen können wir das gleiche mit einer etwas stärkeren Ordinalzahloperation machen:

$$\beth_0 := \omega \qquad \beth \text{ BETH}$$

$$\beth_{\alpha+1} := 2^{\beth_\alpha}$$

$$\beth_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \beth_\alpha \quad (\lambda \text{ Limes})$$

Dies ist eine normale Ordinalzahloperation und hat somit beliebig viele Fixpunkte: Beth-Fixpunkte.

[Bemerkung (Gruppenarbeit #4):
Die Limeswerte der Beth-Operation sind genau die starken Limeskardinalzahlen.]

Mit dem gleichen Beweis zeigen wir also:

$\kappa$ stark unerreichbar

$\Longrightarrow \kappa$ ein Beth-Fixpunkt.

<u>ZIEL</u> Zeige, daß "es ex. eine unerreichbare Kardinalzahl" nicht in ZFC beweisbar ist.
D.h. konstruiere ein Modell, in dem es falsch ist.

[Vorschau. Der Gödelsche Unvollständigkeitssatz besagt, daß keine Grundlagentheorie ihre eigene Widerspruchsfreiheit beweisen kann (es sei denn, sie ist inkonsistent).

Da die Aussage "T ist widerspruchsfrei" äquivalent ist zu "es gibt eine Struktur $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A} \models T$". [Gödelscher Vollständigkeitssatz]

$\Longrightarrow$ keine ordentliche Theorie kann beweisen, daß es Modelle von ihr gibt.

Wir werden zeigen:

$$\mathrm{ZFC} + \exists \kappa \ \kappa \text{ unerreichbar} \Longrightarrow \text{es ex. ein Modell } \mathfrak{A} \models \mathrm{ZFC}.$$

Mit Gödelschem Unvollst.-satz gilt also: falls ZFC widerspruchsfrei ist, kann ZFC nicht $\exists \kappa \ \kappa$ unerreichbar beweisen.

D.h. bei solchen Grundlagentheorien müssen alle mathematischen Aussagen immer unter der Zusatzvoraussetzung "Die Theorie ist widerspruchsfrei" gemacht werden.

Unsere Ergebnisse zeigen damit nur

RELATIVE
LOGISCHE STÄRKE

D.h. T ist stärker als S.
[Diese Aussagen sind immer nur bedeutungsvoll unter Annahme, daß die vorkommenden Theorien widerspruchsfrei sind.]

## § 7 DIE KUMULATIVE HIERARCHIE

Wir definieren die VON NEUMANN-Hierarchie oder KUMULATIVE HIERARCHIE durch Rekursion über die Ordinalzahlen

$$V_0 := \emptyset$$
$$V_{\alpha+1} := \mathcal{P}(V_\alpha)$$
$$V_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} V_\alpha \quad (\lambda \text{ Limes-ordinalzahl})$$

Grundlegende Eigenschaften:

Menge $X$ heißt transitiv falls

$$\forall a,b \quad a \in b \in X \longrightarrow a \in X$$
$$[\Longleftrightarrow \quad b \in X \longrightarrow b \subseteq X]$$

(1) $V_\alpha$ sind transitive Mengen

[INDUKTION: $\emptyset$ und Vereinigungen sind transitiv; falls $X$ transitiv, so $\mathcal{P}(X)$ transitiv:

falls $a \in b \in \mathcal{P}(X) \Longrightarrow b \subseteq X$
$\Longrightarrow a \in b \subseteq X$
$\Longrightarrow a \in X$
$\xRightarrow{\text{trs } X} a \subseteq X$
$\Longrightarrow a \in \mathcal{P}(X)$.]

(2) $\alpha \leq \beta \implies V_\alpha \subseteq V_\beta$

[INDUKTION: relevanter Schritt ist $V_\alpha \subseteq V_{\alpha+1}$.

$$x \in V_\alpha \xrightarrow[\text{trs } V_\alpha]{} x \subseteq V_\alpha$$

$$\longrightarrow x \in \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1}.]$$

(3) $\mathrm{Ord} \cap V_\alpha = \alpha$

[INDUKTION: 0, Limes klar. Betrachte also den NF-Fall.

Ang. $\mathrm{Ord} \cap V_\alpha = \alpha$. Zeige $\mathrm{Ord} \cap V_{\alpha+1} = \alpha+1$.

$\alpha \subseteq V_\alpha$ [IA]

$$\implies \alpha \in \wp(V_\alpha) = V_{\alpha+1} \implies \{\alpha\} \subseteq V_{\alpha+1}$$

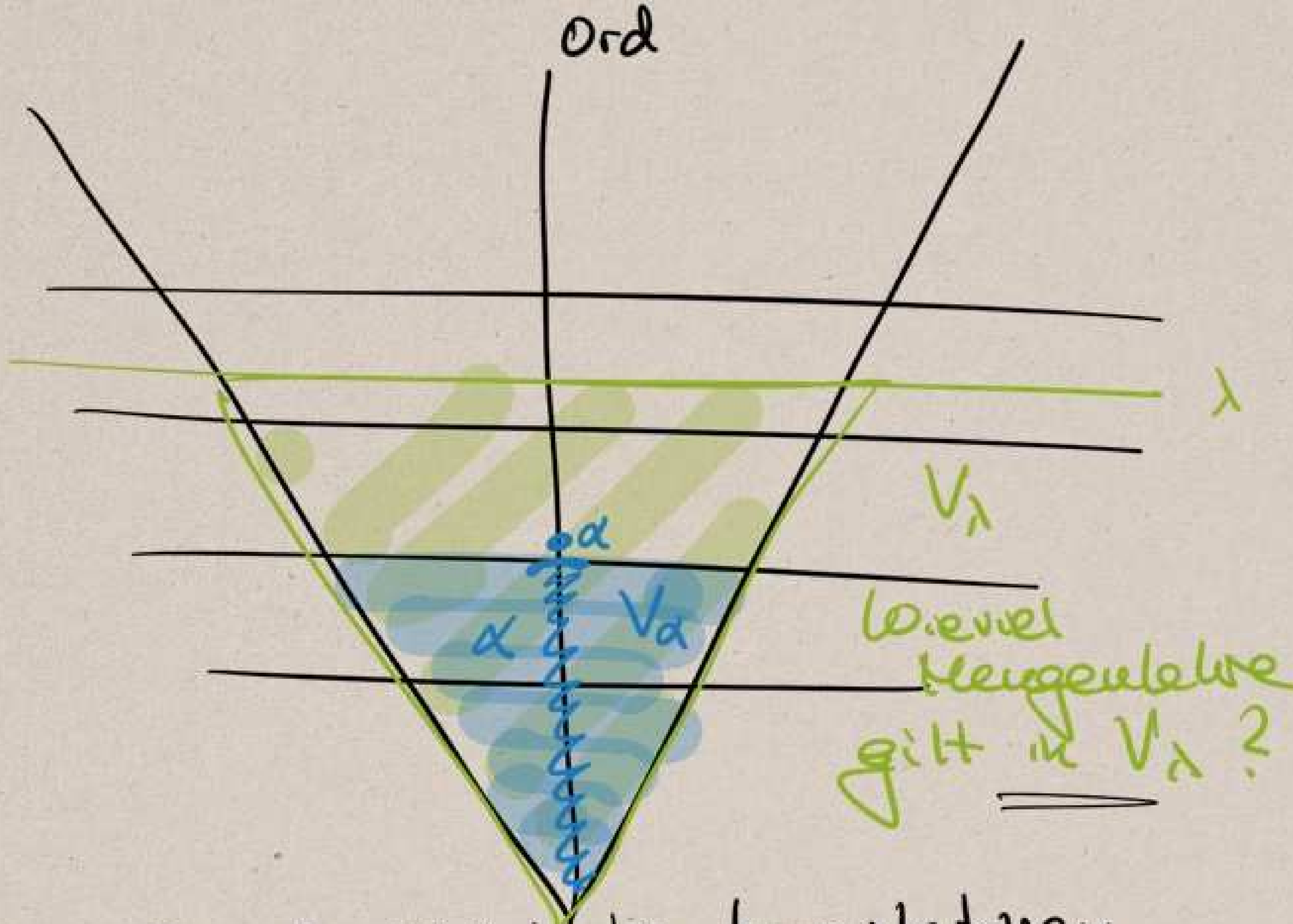
$$\underset{\text{trs } V_{\alpha+1}}{\implies} \alpha \subseteq V_{\alpha+1}$$

$$\implies \underbrace{\alpha \cup \{\alpha\}}_{\alpha+1} \subseteq \underline{V_{\alpha+1}.}$$

Ang. $\alpha+1 \in V_{\alpha+1} = \wp(V_\alpha)$

$$\implies \underbrace{\alpha+1}_{\alpha \cup \{\alpha\}} \subseteq V_\alpha \implies \alpha \in V_\alpha$$

Wid. zur Ann. ]




Das Standardbild der kumulativen Hierarchie:

Ord als RÜCKGRAT des Universums

---

Satz aus den Grundlagen: ZF (mit Fundierungsaxiom) $\vdash$

$$\forall x \exists \alpha (x \in V_\alpha).$$

Also: das Bild beschreibt das Mengenuniversum.

Aus dem Satz [$ZF \vdash \forall x \exists \alpha \; x \in V_\alpha$] folgt die Nützlichkeit der folgenden Definition:

$$\rho(x) := \alpha \quad \text{gdw} \quad x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$$

[Für jedes $x$ ex. ein kleinstes $\alpha$ mit $x \in V_\alpha$ (folgt aus dem Satz); nach Definition kann dieses kleinste $\alpha$ keine Limesordinalzahl sein.
Also ist $\rho$ eine totale Operation vom Mengenuniversum in die Ordinalzahlen.]

<u>Eigenschaften</u> (1) Falls $y \in x$, dann $\rho(y) < \rho(x)$.

[$x \in V_{\alpha+1} \setminus V_\alpha$
$x \in V_{\alpha+1} = \mathcal{P}(V_\alpha)$
$x \subseteq V_\alpha \implies y \in V_\alpha \implies \rho(y) < \alpha$.]

② Für alle $x$ gilt

$$\rho(x) = \bigcup\{\rho(y)+1 ; y \in x\}$$

[① sagt $\rho(y) < \rho(x) \Longrightarrow \rho(y)+1 \leq \rho(x)$

$$\Longrightarrow \underbrace{\bigcup\{\rho(y)+1 ; y \in x\}}_{=:\,\alpha} \leq \rho(x).$$

Bleibt zu zeigen, daß $\underline{\rho(x) \leq \alpha}$.

Da für alle $y \in x$ gilt

$$\rho(y) < \rho(y)+1 \leq \alpha$$

haben wir $y \in V_\alpha$ für alle $y \in x$.

$$\Longrightarrow x \subseteq V_\alpha$$

$$\Longrightarrow x \in V_{\alpha+1}$$

$$\Longrightarrow \underline{\rho(x) \leq \alpha} \quad ]$$

<u>Bsp.</u> $\rho(\{x\}) = \rho(x) + 1$.

$\rho(\{x,y\}) = \max(\rho(x), \rho(y)) + 1$.