Modelle der Mengenlehre

VORLESUNG III

17. NOVEMBER 2020

§5 Verbesserte Löwenheim-Skolem-Sätze

Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Wir erweitern die Sprache durch zusätzliche Konstantensymbole c_a (für $a \in A$) und nennen diese Symbolmenge S_A.

Erinnerung

Begriffe letztes Mal:

- Einbettung
- elementare Einbettung
- Isomorphismus
- Elementaräquivalenz

$$S_A := S \cup \{c_a \, ; \, a \in A\}.$$

Wir definieren:

(i) das ATOMARE DIAGRAMM von $\mathfrak{A}$

$$\mathrm{AtDiag}(\mathfrak{A}) := \{\varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \, ; \, \varphi \text{ ist atomare Formel mit } n \text{ freien Variablen und } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\} \cup$$

$$\{\neg\varphi(c_{a_1}, \ldots, a_n) \, ; \, \varphi \text{ ist at. F. mit } n \text{ freien Variablen und } \mathfrak{A} \not\models \varphi(a_1, \ldots, a_n)\}$$

② das ELEMENTARE DIAGRAMM von $\mathfrak{A}$

$$\mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A}) := \{\varphi(c_{a_1}, \dots, c_{a_n});\ \varphi \in L_n^S \text{ und } \mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n)\}.$$

Falls $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur ist und $\mathfrak{B}$ eine S_A-Struktur. Dann gilt:

① $\underline{\mathfrak{B} \models \mathrm{AtDiag}(\mathfrak{A})} \Longrightarrow$

$\pi : a \longmapsto c_a^{\mathfrak{B}}$ ist eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^*$ [wobei $\mathfrak{B}^*$ das S-Redukt von $\mathfrak{B}$ ist]

② $\mathfrak{B} \models \mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A}) \Longrightarrow$

$\pi : a \longmapsto c_a^{\mathfrak{B}}$ ist eine elementare Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}^*$.

Diese Behauptung ist recht offensichtlich:

z.B. $R(a,b)$ für $a,b \in A$ und
R Relationssymbol
binär

Ang. $\mathfrak{A} \models R(a,b)$

$\Longrightarrow R(c_a, c_b) \in \underline{\mathrm{AtDiag}}(\mathfrak{A})$

$\Longrightarrow \mathfrak{B} \models R(c_a, c_b)$

$\Longrightarrow \underline{R^{\mathfrak{B}}(c_a^{\mathfrak{B}}, c_b^{\mathfrak{B}})} . \Longrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\pi(a), \pi(b))'.$

Ebenso für ②:

$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$

$\Longrightarrow \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \in \underline{\mathrm{ElDiag}}(\mathfrak{A})$

$\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n})$

$\Longrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \ldots, \pi(a_n))$

Theorem (VERBESSERTER LÖWENHEIM-SKOLEM AUFWÄRTS)

Falls $\mathfrak{A}$ eine unendliche Struktur ist und $\kappa \geq |A| + |L^S|$. Dann ex. ein Modell $\mathfrak{B}$ mit $|B| = \kappa$ und eine el. Einbettung

$$\pi : \mathfrak{A} \prec \mathfrak{B}.$$

[**Bem.** Der klassische LöSko↑ gibt uns ein $\mathfrak{B}$ mit $|B| = \kappa$ und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.]

Beweis. Wir betrachten die Symbolmenge S_A und erweitere $\mathfrak{A}$ zu einer S_A-Struktur $\mathfrak{A}^*$ durch

$$c_a^{\mathfrak{A}^*} := a.$$

Dann gilt also $\underline{\mathfrak{A}}^* \models \mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A})$, also ist $\mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A})$ erfüllbar in einem unendlichen Modell. Wende darauf LöSko↑ an und erhalte $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{B} \equiv \underline{\mathfrak{A}}^*$.
[Hier kann $|B|$ eine Kardinalzahl $\geq |L^{S_A}| = |A| + |L^S|$ sein.]

Da $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}^* \models \mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A})$, gilt

$\mathfrak{B} \models \mathrm{ElDiag}(\mathfrak{A})$

$\Longrightarrow$ es ex. eine el. Einbettung von $\mathfrak{A}$ in das S-Redukt von $\mathfrak{B}$. q.e.d.

Ziel: Verbessere auch den absteigenden Satz von Lösko.
Falls $\mathfrak{A}$ eine unendliche Struktur, finde $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq A$ und der Identität als elementare Einbettung, so daß $|B|$ abzählbar ist.

Hilfsmittel

LEMMA (Tarski-Vaught-Test) TVT

Seien $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Strukturen und $\pi: A \to B$ eine Einbettung. Falls für alle $\varphi \in L^S_{n+1}$ und alle $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

wenn $\mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(x, \pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$ so $\quad (*)$

$\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$.

Dann ist π eine elementare Einbettung.

<u>Beweis</u> Wir hatten gesehen, daß Einbettungen fast alle Äquivalenzen in der Induktion über den Formelaufbau für den Nachweis der Elementarität erfüllen — mit einer Ausnahme:

∃ Rückrichtung

Und das ist exakt der Fall, den wir nun in der Voraussetzung des TVT geschrieben haben. q.e.d.

<u>Def.</u> Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur. Dann heißt eine Funktion $f : L^S \times A^{<\omega} \longrightarrow A$ Skolemfunktion für $\mathfrak{A}$ falls für alle Formeln $\varphi \in L^S_{n+1}$ und $a_1, \dots, a_n \in A$ gilt:

- falls $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$,
- so $\mathfrak{A} \models \varphi(f(\varphi, a_1, \dots, a_n), a_1, \dots, a_n)$.

[Die Funktion f besorgt uns einen Zeugen für die Existenzaussage.].

<u>Lemma</u> (ZFC). Für jede Struktur $\mathfrak{A}$ gibt es Skolemfunktionen.

<u>Beweis</u> Falls $\mathfrak{A} \not\models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$, so sei $f(\varphi, a_1, \dots, a_n) = a_0$ für ein beliebiges, vorher festgelegtes $a_0 \in A$.

~~Andernfalls~~, d.h.

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, a_1, \dots, a_n)$$

$$\Longrightarrow \{a \in A;\ \mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\} \neq \emptyset.$$

Sei nun $g : \mathfrak{P}(A) \setminus \{\emptyset\} \longrightarrow A$ eine Auswahlfunktion

$$f(\varphi, a_1, \dots, a_n) := g(\{a \in A;\ \mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)\}).$$

Die so definierte Fkt. f ist eine Skolemfunktion.

q.e.d.

Bemerkung.

Bereits der Vollständigkeitssatz kann nicht in ZF bewiesen werden: das Hinzufügen von Bsp. in der Henkinkonstruktion verwendet Auswahl. Ebenso hier: in ZF können wir die Existenz von Skolemfkt. nicht beweisen.

SKOLEMHÜLLE

Sei $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur und sei $\mathfrak{f}$ eine Skolemfunktion für $\mathfrak{A}$. Sei $Z \subseteq A$. Dann definiere:

$$T(Z) := \{ \mathfrak{I}(t) ;\ t \in T^S \text{ und } \mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta) \text{ mit } \operatorname{ran}(\beta) \subseteq Z \}$$

[Bsp. Falls $Z = \emptyset$, $\mathfrak{A} = (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$, dann sind $T(Z)$ gerade die natürlichen Zahlen.]

$$S(Z) := \{ f_S(\varphi, z_1, \dots, z_n) \; ; \; \varphi \in L_{n+1} \text{ und } z_1, \dots, z_n \in Z \}$$

S_f

Skolem-funktion

Mithilfe der Operatoren T und S definieren wir nun rekursiv:

$$H_0^{\mathfrak{A}}(Z) := Z$$

$$H_{i+1}^{\mathfrak{A}}(Z) := H_i^{\mathfrak{A}}(Z) \cup T(H_i^{\mathfrak{A}}(Z)) \cup S(H_i^{\mathfrak{A}}(Z)).$$

$$H^{\mathfrak{A}}(Z) := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i^{\mathfrak{A}}(Z).$$

Wir definieren $\mathfrak{H}(Z)$ als die S-Unterstruktur von $\mathfrak{A}$ mit Universum $H^{\mathfrak{A}}(Z)$ und nennen dies die Skolemhülle von Z in $\mathfrak{A}$.

Dies erfordert ein Argument.

Zeigen wir also zunächst, daß $\mathcal{H}(Z)$ wirklich eine S-Unterstruktur ist:

Beh. [Falls g ein k-stelliges Fktsymbol in S und $h_1, \ldots, h_k \in H^{\mathfrak{A}}(Z)$, so muß $g^{\mathfrak{A}}(h_1, \ldots, h_k)$ auch in $H^{\mathfrak{A}}(Z)$ liegen.

Finde $i_1, \ldots, i_k$, so daß

$$h_j \in H^{\mathfrak{A}}_{i_j}(Z).$$ Also ex.

$N \in \mathbb{N}$ mit

$$h_1, \ldots, h_k \in H^{\mathfrak{A}}_N(Z).$$

Der Term $g(x_1, \ldots, x_k)$ liefert nun, daß

$$g^{\mathfrak{A}}(h_1, \ldots, h_k) \in T(H^{\mathfrak{A}}_N(Z)) \subseteq H^{\mathfrak{A}}_{N+1}(Z).$$

<u>Bem.</u> $\mathcal{H}(Z) \preccurlyeq \mathfrak{A}$ mit der elementaren Einbettung id.

<u>Beweis</u>. Offensichtlich ist $id: H^{\mathfrak{A}}(Z) \to A$ eine Einbettung. Nach TVT bleibt zu zeigen: $\forall \varphi, h_1, \dots, h_n \in H^{\mathfrak{A}}(Z)$

falls $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(x, h_1, \dots, h_n)$, (*)

dann $\mathcal{H}(Z) \models \exists x\, \varphi(x, h_1, \dots, h_n)$.

Aber dies der Fall, da (*) und die Definition der Skolemfkt. liefert, daß

$$\mathfrak{A} \models \varphi(f(\varphi, h_1, \dots, h_n), h_1, \dots, h_n)$$

aber $f(\varphi, h_1, \dots, h_n) \in S(H_N^{\mathfrak{A}}(Z))$

$$\subseteq H_{N+1}^{\mathfrak{A}}(Z).$$

falls $h_1, \dots h_n \in H_N^{\mathfrak{A}}(Z)$.

Also ist TVT erfüllt, also ist id eine elt. Einbettung.

q.e.d.

Nun zur Größe von $H^{\mathfrak{A}}(Z)$.

Sei $\lambda := |L^S|$ und $\mu := |Z|$.

$$|H_0^{\mathfrak{A}}(Z)| = |Z| = \mu.$$

Angenommen, $|H_i^{\mathfrak{A}}(Z)| \leq \kappa$. Dann ist

$$|H_{i+1}^{\mathfrak{A}}(Z)| \leq \kappa + \lambda \cdot \kappa^{<\omega} + \lambda \cdot \kappa^{<\omega}$$

$H_i^{\mathfrak{A}}(Z) \cup T(H_i^{\mathfrak{A}}(Z)) \cup S(H_i^{\mathfrak{A}}(Z))$

$|T^S| \leq |L^S| = \lambda$

$$\leq \max(\kappa, \lambda).$$

Also gilt für alle i:

$$|H_i^{\mathfrak{A}}(Z)| \leq \max(\lambda, \mu)$$

Also $$|H^{\mathfrak{A}}(Z)| \leq \aleph_0 \cdot \max(\lambda, \mu)$$

<u>KOROLLAR</u> (VERBESSERTER ABSTEIGENDER LÖWENHEIM-SKOLEM)

Sei $\mathfrak{A}$ eine unendliche S-Struktur und $Z \subseteq A$ beliebig. Dann ex. $\mathfrak{B} \preceq \mathfrak{A}$ mit elt. Einb. id und $Z \subseteq B$, so daß $|B| \leq \max(\aleph_0, |Z|, |L^S|)$.

KOROLLAR Jede unendliche S-Struktur für abzählbares S hat abzählbare elt. Substrukturen.

Beispiel 1. GRUPPENARBEIT #3

$\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1)$

Wir erhalten $\mathfrak{B} \preccurlyeq \mathfrak{R}$ mit

$|B| = \aleph_0$.

Nicht nur $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{R}$, sondern auch für $b_1, \ldots, b_n \in B$

$$\mathfrak{B} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{R} \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$$

Frage: $\mathfrak{R} \models \boxed{\exists x\,(x^2 = 2)}$

Wo kommt dieses Element in $\mathfrak{B}$ her?

Frage Wie sieht das mit komplizierteren Formeln aus?

Beispiel 2. Falls $\mathfrak{A} \models ZFC$, so enthält $\mathfrak{A}$ ein elementares abzählbares Untermodell $\mathfrak{B}$ mit $B \subseteq A$.

§6 Zurück zur Mengenlehre: KONFINALITÄT.

Erinnerung: κ heißt SINGULÄR falls eine $C \subseteq \kappa$ existiert mit $|C| < \kappa$ und $\bigcup C = \kappa$.

κ heißt REGULÄR sonst.

C ist unbeschränkt

wir wollen dies etwas genauer machen.

Def. Sei λ eine Limesordinalzahl. Dann sei

$$cf(\lambda) := \min\{\mu \,;\, \text{es ex. eine Teilmenge } C \subseteq \lambda \text{ mit } |C| = \mu \text{ und } \bigcup C = \lambda\}$$

KONFINALITÄT von λ.

Englisch: COFINALITY.

[Nach Def. ist $cf(\lambda)$ eine Kardinalzahl.]

Bem 1 Es ist klar, daß $cf(\lambda) \leq |\lambda|$.

Falls $f : \mu \longrightarrow \lambda$, so heißt f konfinal falls $\operatorname{ran}(f) \subseteq \lambda$ die Eigenschaft hat $\bigcup \operatorname{ran}(f) = \lambda$.

f ist unbeschränkt.

Bem 2. Für beliebiges λ gilt:

$$(*) \quad cf(\lambda) = \min\{\mu ; \text{ es ex. } f : \mu \longrightarrow \lambda \text{ konfinal}\}.$$

Aus Bem. 2 erhalten wir:

falls $f : \lambda \longrightarrow \kappa$ konfinal sind,
$g : \mu \longrightarrow \lambda$

so ist $f \circ g : \mu \longrightarrow \kappa$ konfinal.

Daher: $cf(cf(\kappa)) = cf(\kappa)$. $(**)$

[Hausaufgabe: Überprüfen Sie die Details von $(*)$ und $(**)$.]

REGULÄR: $\kappa = cf(\kappa)$.

Also gilt: Die Kofinalität jeder Limesordinalzahl ist stets eine reguläre Kardinalzahl.

Ziel. Falls λ Limesordinalzahl, $cf(\lambda) = cf(\aleph_\lambda)$.
[Vorlesung IV.]