WS 20/21: Modelle der Mengenlehre

VORLESUNG II: 10. NOVEMBER 2020

§1: Unabhängigkeit in der Mengenlehre

§2: Erinnerung: Vollständigkeit & Kompaktheit

§3: Erinnerung: Löwenheim–Skolem–Sätze

LöSko $\uparrow$

Finden Modell der Kardinalität κ beliebig groß.

LöSko $\downarrow$

Finden Modell der Kard. κ beliebig klein $> |L^S| + \aleph_0$.

__Bsp.__ $\mathbb{N}$ als arithmetische Struktur; gleiche Sprache $S = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$

Dann finden wir $\mathfrak{A}$ mit A überabzählbar, s.d.

$$\{\varphi ; \mathfrak{A} \models \varphi\} = \{\varphi ; \mathbb{N} \models \varphi\}.$$

__Bsp.__ $\mathbb{R}$ als Struktur in einer abzählbaren Sprache

$$S = \{+, \cdot, 0, 1, <\}$$

Dann finden wir $\mathfrak{A}$ mit $|A| = \aleph_0$, so daß

$$\{\varphi ; \mathfrak{A} \models \varphi\} = \{\varphi ; \mathbb{R} \models \varphi\}.$$

__MOTTO__: Die erststufige Logik kann __unendliche__ Kardinalitäten nicht zählen.

§4 Weitere Grundbegriffe der Modelltheorie

Def. Eine Menge T von S-Sätzen heißt **Theorie** falls für alle φ gilt:

$$T \models \varphi \implies \varphi \in T.$$

[Nach Vollst. ist dies äquivalent zu:

$$T \vdash \varphi \implies \varphi \in T]$$

Theorien sind unter sem./synt. Folgerung abgeschlossene Satzmengen.

Def. Falls $\mathfrak{A}$ eine S-Struktur ist, so schreiben wir

$$Th(\mathfrak{A}) := \{\varphi ; \mathfrak{A} \models \varphi\}$$

für die **Theorie von $\mathfrak{A}$.**

Offensichtlich ist dies eine Theorie.

Def. Eine Theorie T heißt **VOLLSTÄNDIG** falls für alle Sätze φ gilt:

$$\varphi \in T \text{ oder } \neg\varphi \in T.$$

Vgl. Eine Satzmenge Φ hieß <u>negationstreu</u> falls für alle φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

Bem. Für Theorien T gilt:

T ist negationstreu $\iff$ T ist vollständig.

Bsp. Falls $\mathfrak{A}$ eine Struktur ist, so ist $Th(\mathfrak{A})$ vollständig.

[Folgt direkt aus der Semantik von $\neg$.]

Def. Eine Theorie T heißt **kategorisch**, wenn sie bis auf Isomorphie ein eindeutig bestimmtes Modell hat.

[offensichtlich: T kategorisch $\implies$ $T = Th(\mathfrak{A})$ $\implies$ T ist vollständig]

BEOBACHTUNG Es gibt fast keine kategorischen Theorien.

Falls T ein unendliches Modell hat, sagen wir $\mathfrak{A}$ und $\kappa > |A|$, so existiert ein Modell $\mathfrak{B} \models T$ mit $|B| = \kappa$. Insbesondere:

$$\mathfrak{A} \not\cong \mathfrak{B}.$$

Also ist T nicht kategorisch.

Also: T ist kategorisch genau dann wenn es ein endliches $\mathfrak{A}$ gibt mit $T = Th(\mathfrak{A})$.

Def. Sei κ eine Kardinalzahl und T eine Theorie. Dann heißt T ***κ-kategorisch*** falls alle Modelle von T der Kardinalität κ isomorph sind.

Theorem (Vaught-Test).
Falls T eine Theorie ist, die nur unendliche Modelle hat und eine unendliche Kardinalzahl κ ex., so daß T κ-kategorisch ist, so ist T vollständig.

Beweis Ang. T nicht vollständig, also ex. φ so daß $T \nvdash \varphi$ und $T \nvdash \neg\varphi$.

$\Downarrow$ Vollst. $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ Vollst.

es ex. $\mathfrak{A} \models T \cup \{\neg\varphi\}$ $\qquad$ es ex $\mathfrak{B} \models T \cup \{\varphi\}$.

Aus Vorauss. folgt: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ unendlich.

Mit LöSk↑ und/oder LöSk↓ erhalten wir

$$\overline{\mathfrak{A}} \models T \cup \{\neg\varphi\} \quad \text{mit}$$

$$\overline{\mathfrak{B}} \models T \cup \{\varphi\} \quad |\overline{A}| = |\overline{B}| = \kappa.$$

Da T κ-kategorisch war, gilt

$$\overline{\mathfrak{A}} \cong \overline{\mathfrak{B}}.$$

Nach Isomorphielemma gilt also

$$Th(\overline{\mathfrak{A}}) = Th(\overline{\mathfrak{B}})$$

Widerspruch!

q.e.d.

Das bedeutet:

falls T $\aleph_0$-kategorisch ist, ist es <u>vorstellbar</u>, dass nicht-isomorphe überabzählbare Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$ existieren, aber

$$Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B}).$$

Banales Beispiel

$$S = \emptyset$$

S-Strukturen sind also reine Mengen.

$$\mathfrak{A} = (A)$$

Was sind S-Isomorphismen?
Einfach nur Bijektionen:

$$|A| = |B| \Longrightarrow \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}.$$

Also ist diese Theorie κ-kategorisch für jedes κ.

Wir finden Strukturen mit z.B. 3 Elementen

$$A = \{a_0, a_1, a_2\}$$

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq 3} \wedge \neg \varphi_{\geq 4}.$$

aber auch Strukturen mit 4 Elementen,
z.B. $\mathfrak{B} \not\models \varphi_{\geq 3} \wedge \neg \varphi_{\geq 4}$.

Zum Wort Theorie

Ein Axiomensystem Φ ist üblicherweise keine Theorie. Häufig sagen wir aber, daß

$$\Phi = \{\forall x \forall y \forall z\, (xy)z = x(yz) \wedge \exists x [\forall y\; xy = y \wedge \forall z \exists w\; zw = x]\}$$

die "Theorie der Gruppen" ist.

Gemeint ist
$$T := \{\varphi \,;\, \Phi \models \varphi\}.$$

$\boxed{\text{Bsp 1a}}$ Fügen wir zu unserem banalen Bsp. Axiome hinzu, die erzwingen, daß die Struktur unendlich ist:

$$\Phi := \{\varphi_{\geq n} \,;\, n \in \mathbb{N}\}$$
$$T := \{\varphi \,;\, \Phi \models \varphi\}$$

Dann ist T immer noch κ-kategorisch für alle κ, hat nur unendliche Modelle und ist somit nach Vaught-Test eine vollständige Theorie.

$\boxed{\text{Bsp 2}}$ $S = \{E\}$ binäres Relations-symbol

AXIOME

φ_R $\forall x \; xEx$

φ_T $\forall x \forall y \forall z \; xEy \wedge yEz \longrightarrow xEz$

φ_S $\forall x \forall y \; xEy \longrightarrow yEx$

E wird durch eine Äquivalenz rel. interpretiert.

$\varphi^1_{\geq n}$ $\exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i E x_j$

$\varphi^2_{\geq n}$ $\forall x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n$
$$\bigwedge_{i=0}^{n} x_0 E x_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$$

$$\Phi := \{\varphi_R, \varphi_T, \varphi_S, \varphi^1_{\geq n}, \varphi^2_{\geq n} ; n \in \mathbb{N}\}$$

$$T := \{\varphi ; \Phi \models \varphi\}$$

$\uparrow$

IIEC — INFINITELY MANY INFINITE EQUIVALENCE CLASSES

Beh. T $\aleph_0$-kategorisch.

Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ abz., $\mathfrak{A}, \mathfrak{B} \models T$.

Sei $\{A_i ; i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ÄK in $\mathfrak{A}$
$\{B_i ; i \in \mathbb{N}\}$ die Menge der ÄK in $\mathfrak{B}$
[Diese Mengen müssten unendlich sein.]

Da A, B abz. $\Longrightarrow$ es gibt Abz. von A_i, B_i : $A_i = \{a_{ij} ; j \in \mathbb{N}\}$ UNENDLICH.
$B_i = \{b_{ij} ; j \in \mathbb{N}\}$

Dann ist die Abb.

$$a_{ij} \longmapsto b_{ij}$$

ein Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

[Falls $a_{ij} E a_{kl} \Rightarrow i=k$
$\Rightarrow b_{ij} E b_{kl}$.]

Nach Konstruktion hat IIEC nur unendliche Modelle, also ist die Theorie nach Vaughts Test vollständig.

BEOBACHTUNG

Diese Theorie ist nicht $\aleph_1$-kategorisch.

$\mathfrak{A} :=$

(A, E) mit Äquivalenzklassen A_i $(i \in \mathbb{N})$ alle Kardinalität $\aleph_1$

$\mathfrak{B} :=$ $|A| = \aleph_1$.

(B, F) mit Äquivalenzklassen B_α $(\alpha \in \aleph_1)$ alle Kardinalität $\aleph_0$

$|B| = \aleph_1$

Aber $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind nicht isomorph.

DEF. Seien $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ S-Strukturen und
$$\pi : A \longrightarrow B.$$
Wir sagen, daß π eine **Einbettung** ist, falls π S-strukturerhaltend ist

$$\left[\begin{array}{l} \pi(c^{\mathfrak{A}}) = c^{\mathfrak{B}} \\ \pi(f^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n)) = f^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \\ R^{\mathfrak{A}}(a_1, \dots, a_n) \Longleftrightarrow R^{\mathfrak{B}}(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)) \end{array}\right]$$

und injektiv ist.

Wir sagen, daß π ein **Isomorphismus** ist, falls π Einbettung ist und surjektiv.

Wir sagen, daß π **elementare Einbettung** ist, falls π Einbettung und für alle Formeln φ gilt
$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \Longleftrightarrow \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$$

ERINNERUNG

ISOMORPHIELEMMA (EFT 3.5.2)
$$\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Longrightarrow Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$$
Aber im Beweis wird gezeigt: jeder Isomorphismus ist eine elementare Einbettung.

Falls $\pi : A \longrightarrow B$ eine Einbettung ist, so gilt sicherlich

① falls φ atomar

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$$

② falls φ keine Quantoren enthält (quantorenfrei)

$$\mathfrak{A} \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \iff \mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n)).$$

[Einfache Induktion.]

③ $\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(a_1, \dots, a_n)$

$\iff$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi(a, a_1, \dots, a_n)$

$\implies$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{B} \models \varphi(\pi(a), \pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$

$\implies \mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$

EFT

Substitutionslemma

$\iff$ es ex. $b \in B$ $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$

Zusammenfassend: Falls φ quantorenfrei

$$\mathfrak{A} \models \exists x\, \varphi(a_1, \dots, a_n) \implies \mathfrak{B} \models \exists x\, \varphi(\pi(a_1), \dots, \pi(a_n))$$

π ist Iso von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

$\pi: \mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$

$\Downarrow$

π ist elem. Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ $\Longrightarrow$ $Th(\mathfrak{A}) = Th(\mathfrak{B})$

$\pi: \mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$

$\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind elementaräquivalent:

$\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$.

$\Downarrow$

π ist Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$

Kann man die Pfeile umdrehen?

ANTWORT: NEIN.

<u>Beobachtung</u>: Falls $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B} \Longrightarrow |A| = |B|$.

Falls $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B} \Longrightarrow |A| \leq |B|$

Falls eine Einbettung von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{B}$ ex., so $|A| \leq |B|$.

<u>Idee</u> $\equiv$ ist symmetrisch, $\preccurlyeq$ ist asymmetrisch.

(1) Einbettung $\not\Rightarrow \equiv$

$S = \{<\}$.

$(\mathbb{Z}, <)$ $(\mathbb{Q}, <)$

Die Identität $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ist eine Einbettung.

$$\delta_1 = \forall x \forall y (x<y \longrightarrow \exists z (x<z \wedge z<y))$$

Es gilt $(\mathbb{Q}, <) \models \delta$

$(\mathbb{Z}, <) \not\models \delta$.

Also $(\mathbb{Q}, <) \not\equiv (\mathbb{Z}, <)$.

(2) $\equiv \not\Rightarrow$ [elementare] Einbettung

Sei T eine vollständige beliebige Theorie mit unendlichen Modellen. LöSk↑ gibt uns Modelle $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ mit $|A| < |B|$ und $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$, also auch $\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{A}$. Aber sicherlich gibt es keine Inj. von B nach A.

③ Ziel finde $\mathfrak{A} \preccurlyeq \mathfrak{B}$, nicht isomorph.
[In VL #3 werden wir verbesserte Lösk-Theoreme beweisen, die solche Beispiele sehr einfach machen werden.
Insbesondere werden wir Kriterien finden, die sicherstellen, daß eine gegebene Einbettung π elementar ist.]
Hier: VON HAND.
Wir betrachten wieder die "banale Situation":

$$S = \emptyset$$

Ich möchte zeigen, daß für unendliche Mengen $A \subseteq B$ die Identität

$$\mathrm{id}: A \longrightarrow B$$

immer eine elementare Einbettung ist.
Das beweist ③: ich wähle $|A| < |B|$ und erhalte, daß $\underline{\underline{\mathfrak{A}}} \not\cong \underline{\underline{\mathfrak{B}}}$.
Wollen sagen, daß zwei n-Tupel $\vec{a}, \vec{a}' \in A^n$ die gleiche Signatur haben, falls für alle i,j gilt

$$a_i = a_j \iff a_i' = a_j'.$$

$\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$
$\vec{a}' = (a_1', \dots, a_n')$

Lemma Falls $\vec{a}, \vec{a'}$ die gleiche Signatur haben, so gilt

$$\mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a}) \iff \mathfrak{A} \models \varphi(\vec{a'}).$$

Beweis Induktion über den Formelaufbau:

ATOMAR Folgt direkt aus "gleiche Signatur"

$\wedge, \vee, \neg, \rightarrow$ wie üblich in der Induktion.

$\exists$: $\mathfrak{A} \models \exists x \, \varphi(x, \vec{a})$

$\iff$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi(\underbrace{a, \vec{a}}_{n+1\text{-Tupel}})$

I.a. haben $(a, \vec{a})$ und $(a, \vec{a'})$ nicht die gleiche Signatur

Aber da A unendlich war, existiert ein $a' \in A$, so daß $a', \vec{a'}$ und $a, \vec{a}$ die gleiche Signatur haben

$\iff$ es ex. $a' \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi(a', \vec{a'})$

$\iff$ $\mathfrak{A} \models \exists x \, \varphi(\vec{a'})$.

q.e.d.

$(12, 3, 12, 2, 3)$

$(12, 7, 5, 3, 7)$ $(3, 12, 2, 3)$

Nun folgt aus dem Lemma, daß die Identität eine elementare Einbettung ist:

Per Induktion

ATOMAR und $\wedge, \vee, \neg$:

da id eine Einbettung ist, gilt die Behauptung.

$\mathfrak{A} \models \exists x \, \varphi(x, \vec{a})$

$\Longleftrightarrow$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{A} \models \varphi(a, \vec{a})$

$\Longrightarrow$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{a})$

Um $\Longleftarrow$ zu sehen, nehmen wir an, daß $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \vec{a})$

finde $a \in A$ mit $(a, \vec{a})$ hat die gleiche Signatur wie $(b, \vec{a})$

Nach Lemma

es ex. $b \in B$ $\mathfrak{B} \models \varphi(b, \vec{a})$

$\Longleftrightarrow$ es ex. $a \in A$ $\mathfrak{B} \models \varphi(a, \vec{a})$

q.e.d.