Modelle der Mengenlehre

WINTERSEMESTER 2020/21

VORLESUNG I
3. November 2020

§1: UNABHÄNGIGKEIT IN DER MENGENLEHRE: UNERREICHBARE KARDINALZAHLEN

In ZFC hatten wir definiert

$$\aleph_\alpha$$

Transfinite Rekursion:

Hartogs-Aleph

Sonderfall $\longrightarrow \aleph_0 := \omega$

Nachfolgerkardinalzahlen $\longrightarrow \aleph_{\alpha+1} := \aleph(\aleph_\alpha)$

Limeskardinalzahlen $\longrightarrow \aleph_\lambda := \bigcup_{\alpha<\lambda} \aleph_\alpha$ $\quad\lambda$ Limesordinalzahl

Wir hatten gesehen:

Falls X unendlich, so ex. α Ord.z. mit $|X| = \aleph_\alpha$. [ZFC]

Betrachten wir z. B. $\aleph_\omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \aleph_n$

Dann ist $\aleph_\omega$ eine abzählbare Vereinigung von kleineren Ordinalzahlen.

Gruppenarbeit #1:

Satz von Hessenberg.

Falls α eine unendliche Ordinalzahl ist, so existiert eine Bijektion zw. $\alpha \times \alpha$ und α.

[Offensichtlich nicht wahr für $\alpha < \omega$; für $\alpha = \omega$ bekannt.]

Theorem (ZFC) Falls $\kappa = \aleph_{\alpha+1}$ eine NF-Kard. zahl ist, so existiert keine $C \subseteq \kappa$ mit $|C| < \kappa$, so daß $\bigcup C = \kappa$.

Beweis Wir zeigen dies durch Widerspruch: falls $|C| < \kappa$ mit $\bigcup C = \kappa$, so definieren wir eine Surjektion

$$\pi : \underbrace{\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha}_{\text{Nach Hessenberg ist } |\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha| = \aleph_\alpha} \longrightarrow \aleph_{\alpha+1}.$$

Wir haben $|C| < \kappa$, also existiert Surjektion

$$\pi_C : \aleph_\alpha \longrightarrow C$$

Falls $\gamma \in C$, so ex. auch Surjektion

$$\pi_\gamma : \aleph_\alpha \longrightarrow \gamma.$$

Wählen wir diese (AC!).

$\supset$

$$\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha \longrightarrow \aleph_{\alpha+1}$$

$$\pi : (\xi, \eta) \longmapsto \pi_{\pi_C(\xi)}(\eta)$$

__Beh.__ π ist surjektiv.

Sei $\beta \in \aleph_{\alpha+1} = \bigcup C$, also ex. $\gamma \in C$ mit $\beta \in \gamma$. Finde ξ mit $\pi_C(\xi) = \gamma$ und η mit $\pi_\gamma(\eta) = \beta$.

Dann ist $\pi(\xi, \eta) = \beta$. q.e.d.

__Def__ Wir nennen Kardinalzahl κ __REGULÄR__ falls keine Menge $C \subseteq \kappa$ mit $|C| < \kappa$ existiert, so daß $\bigcup C = \kappa$.

Sonst __SINGULÄR__.

__Theorem klärt__: Jede NF-Kardinalzahl ist regulär.

Anders bei Limeszahlen: $\aleph_\omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \aleph_n$

$C := \{\aleph_n ; n \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar.

Auch die folgende Limeszahl:

$$\aleph_{\omega\cdot 2} = \bigcup_{\alpha<\omega\cdot 2} \aleph_\alpha$$

$$C := \{\aleph_\alpha ; \alpha < \omega\cdot 2\}$$

$$|C| = \aleph_0 ; \quad \bigcup C = \aleph_{\omega\cdot 2}$$

Falls $\lambda < \aleph_1$ Limesordinalzahl, so hat $C := \{\aleph_\alpha ; \alpha < \lambda\}$ Kardinalität $\aleph_0$ und somit ist $\aleph_\lambda$ singulär.

Aber auch $\aleph_{\aleph_1} = \bigcup C$

mit $C = \{\aleph_\alpha ; \alpha < \aleph_1\}$

$$|C| = \aleph_1 < \aleph_{\aleph_1}$$

Somit ist auch $\aleph_{\aleph_1}$ singulär.

FRAGE Gibt es reguläre Limeskardinalzahlen?

Def. κ heißt SCHWACH UNERREICHBAR falls κ eine reguläre Limeszahl ist.

ANTWORT Diese Frage kann nicht in ZFC beantwortet werden.

Genauer Falls ein Modell $\mathfrak{M} \models ZFC$ eine unerreichbare Kardinalzahl enthält, so können wir ein Modell $\mathfrak{M}' \models ZFC + A$ konstruieren, wobei

$$A := \text{"es gibt keine regulären Limeskardinalzahlen"}.$$

Unser erstes Ziel (vermutlich bis Mitte Januar) ist es, dieses Theorem zu beweisen und zu verstehen.

VORSCHAU. Eine Kardinalzahl κ heißt **Aleph-Fixpunkt** falls $\kappa = \aleph_\kappa$.

ZFC beweist, daß solche Fixpunkte existieren. ["normale Ordinalzahloperationen"]

Die Konstruktion in diesem Beweis liefert

kleinster Fixpunkt ist singulär

$$\aleph_0 \quad \aleph_{\aleph_0} \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_0}} \quad \aleph_{\aleph_{\aleph_{\aleph_0}}} \quad \underbrace{\aleph_{\aleph_{\cdot_{\cdot_{\cdot_{\aleph_0}}}}}}_{n} = \alpha_n$$

$$\kappa := \bigcup \alpha_n$$

Wir werden zeigen:
falls κ unerreichbar, so muß κ ein Aleph-Fixpunkt sein.

Im allgemeinen gilt für eine Limesordinalzahl λ, daß die Kard. der kleinsten Menge C, so daß $\bigcup C = \aleph_\lambda$ gleich der Kardinalität der kleinsten Menge D, so daß $\bigcup D = \lambda$ ist.

$$\aleph_\kappa = \kappa$$

---

§2 Erinnerung: Vollständigkeit und Kompaktheit

S Symbolmenge, L^S Sprache,
$\Phi \subseteq L^S$, $\varphi \in L^S$

$\Longrightarrow$ VOLLSTÄNDIGKEIT

VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ:

FINITÄR

$$\boxed{\Phi \vdash \varphi} \Longleftrightarrow \boxed{\Phi \models \varphi}$$

$\Longleftarrow$ KORREKTHEIT

(oder äquivalent)

Φ ist widerspruchsfrei $\Longleftrightarrow$ Φ ist erfüllbar

Die Endlichkeit der Beweise gibt uns unmittelbar aus dem Vollständigkeitssatz den

KOMPAKTHEITSSATZ

Falls jede endliche TM von Φ erfüllbar ist, so ist auch Φ erfüllbar.

Anwendungen Die Klasse der endlichen S-Strukturen ist nicht in L^S axiomatisierbar.

Beweis Ang. Ψ sei eine solche Axiomatisierung, d.h.

$$\mathfrak{A} \text{ ist endlich} \iff \mathfrak{A} \models \Psi . \quad (*)$$

Betrachte $\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \ldots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j$

und $\Phi := \{ \varphi_{\geq n} ; n \in \mathbb{N} \}$ (**)

Dann gilt: $\mathfrak{B} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{B}$ ist unendlich.

Betrachte $\Phi \cup \Psi$. Jede endliche TM von $\Phi \cup \Psi$ ist erfüllbar, also nach Kompaktheit ist $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar. Aber nun liefern (*) & (**) den Widerspruch. □

Verallgemeinerung. Falls A eine Menge von Axiomen ist, so daß A beliebig große endliche Modelle hat, so ist die Klasse der endlichen Modelle von A nicht axiomatisierbar.

Außerdem Es existiert ein Modell $\mathfrak{B} \models A$, welches unendlich ist.

Bemerkung Die Klasse der endlichen Modelle von A ist zwar nicht axiomatisierbar, aber die Klasse der unendlichen Modelle ist axiomatisierbar und zwar durch $A \cup \Phi$.

Weitere Anwendung. Sei Φ eine Menge

Thm von L^S-Sätzen, welche ein unendliches Modell haben. Sei κ eine beliebige Kardinalzahl. Dann ex. ein Modell

$\mathfrak{A} \models \Phi$ mit $|A| \geq \kappa$.

$\shortparallel$

$(A, \mathfrak{a})$

KONSEQUENZ

z.B. $\underline{(\mathbb{N},+,\cdot,0,1,<)} = \mathfrak{N}$

$$\Psi := \{\varphi \,;\, \mathfrak{N} \models \varphi\}$$

Dann hat Ψ ein unendliches Modell.

Wähle $\kappa \geq \aleph_1$. Dann gibt es ein Modell $\mathfrak{A} \models \Psi$ mit $|A| \geq \kappa$.

Beweis des Thms Ψ ist gegeben und $\underline{\mathfrak{A}_0 = (A_0, \mathfrak{a}_0)}$ ist ein unendliches Modell von Ψ.

Wir fügen κ viele Konstanten zur Sprache hinzu: c_α $(\alpha < \kappa)$

Betrachte $\varphi_{\alpha\beta} := \underline{c_\alpha \neq c_\beta}$ für $\alpha \neq \beta$

$$\Phi := \{\varphi_{\alpha\beta} \,;\, \alpha \neq \beta\}.$$

Falls $\underline{\mathfrak{A} \models \Phi}$, dann gilt falls $\alpha \neq \beta$

$$\mathfrak{a}(c_\alpha) = c_\alpha^{\mathfrak{A}} \neq c_\beta^{\mathfrak{A}} = \mathfrak{a}(c_\beta)$$

D.h. die Abbildung $\alpha \longmapsto c_\alpha^{\mathfrak{A}}$ ist eine Injektion.

$$\alpha \longmapsto c_\alpha^{\mathfrak{A}}$$

$$\kappa \xrightarrow[\text{inj.}]{} A$$

$$\Longrightarrow |A| \geq \kappa .$$

<u>Beh.</u> Es ex. ein Modell von $\Psi \cup \Phi$.

Nach Kompaktheit muß ich lediglich zeigen, daß jede endliche TM X von $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar ist.

$$X \subseteq \Psi \cup \{ \overbrace{c_{\alpha_1} \neq c_{\alpha_2}, \ldots, c_{\alpha_{2n+1}} \neq c_{\alpha_{2n+2}}}^{\Phi_0} \}$$

Da A_0 unendlich war, interpretieren wir einfach die c_{α_i} für $i = 1, \ldots, 2n+2$ durch paarweise verschiedene Elemente von A_0.

$$\mathfrak{A}_0 \models \Psi \cup \Phi_0 \Longrightarrow \mathfrak{A}_0 \models X .$$

q.e.d.

§3 Erinnerung: Löwenheim-Skolem-Sätze

Was wissen wir eigentlich über das Modell, welches wir aus dem Vollständigkeitssatz bekommen?

HENKINs Termmodellkonstruktion.

(Φ) widerspruchsfrei

$\mathfrak{J}^{\Phi} := T^S/_{\sim_\Phi}$ Termmodell

Im allgemeinen gilt NICHT: $\mathfrak{J}^{\Phi} \models \Phi$.

<u>Henkins Lemma</u> Falls Φ widerspruchsfrei, negationstreu und beispielenthaltend ist, so gilt $\mathfrak{J}^{\Phi} \models \Phi$.

$\Phi \rightsquigarrow$ Erweitere Sprache S mit Konstanten zu $\hat{S} \supseteq S$, so daß $|\hat{S}| = |S|$ und $\hat{\Phi} \supseteq \Phi$, so daß erfüllt $\hat{\Phi}$ die Eigenschaften von Henkins L.

Wie groß ist $\mathfrak{I}^{\hat{\Phi}}$?

$$\mathfrak{I}^{\hat{\Phi}} = (A^{\hat{\Phi}}, \alpha)$$

$$\underline{A^{\hat{\Phi}}} = \underline{T}^{\hat{S}} / \sim_{\hat{\Phi}} \qquad \max(\aleph_0, |S|)$$

$$\| $$

$$|A^{\hat{\Phi}}| \leq |T^{\hat{S}}| \underset{?}{\leq} \max(\aleph_0, |\hat{S}|)$$

[Für überabzählbares $\hat{S}$ braucht man hier den Satz von Hessenberg $\longrightarrow$ Gruppenarbeit #1]

<u>Theorem</u> (Absteigender Satz von Löwenheim & Skolem)

Falls $\Phi \subseteq L^S$ widerspruchsfrei ist, so gibt es ein Modell $\mathfrak{A}$

mit $|A| \leq \max(\aleph_0, |S|)$

Folgt unmittelbar aus dem Henkin-Beweis des Vollständigkeitssatzes.

KONSEQUENZ

$$(\mathbb{R}, \underline{+, \cdot, ^{-1}, 0, 1, <}) =: \mathfrak{R}$$

und $\Phi := \{\varphi ; \mathfrak{R} \models \varphi\}$

Dann existiert ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$ mit $|A| \leq \max(\aleph_0, 6) = \aleph_0$.

__Korollar__ Falls $\Phi \subseteq L^S$ unendliche Modelle hat, und $\kappa \geq \max(\aleph_0, |S|)$ so existiert ein Modell $\mathfrak{A} \models \Phi$ mit $|A| = \kappa$.

__Beweis__ : Erweitere die Sprache L^S um κ viele Konstanten c_α $(\alpha < \kappa)$. Sei S^* die neue Symbolmenge und $\Psi = \{\varphi_{\alpha\beta} ; \alpha \neq \beta\}$ wie im Thm aus §2. Dann existiert nach LS↓ ein Modell $\mathfrak{A}$ von $\Phi \cup \Psi$ mit $|A| \leq \max(\aleph_0, |S^*|) = \kappa$.

Da $\mathfrak{A} \models \Psi$, gilt $|A| \geq \kappa \Longrightarrow |A| = \kappa$ q.e.d.