

MUSTERKLAUSUR

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Technischer Ablauf. Die Klausur ist eine sogenannte *Kofferklausur* (*open book exam*): Sie dürfen alle schriftlichen Hilfsmittel nutzen, die Ihnen zur Verfügung stehen, d.h., Vorlesungsnotizen, Vorlesungsmitschriften, Gruppenarbeitszettel, Gruppenarbeitsnotizen, Vorbereitungsmaterial, Bücher, etc. Sie dürfen während der Klausur mit keiner Person in Kontakt treten: dies schließt e-mail-Kontakt und Fragen in Internetforen ein.

Die Tatsache, daß Sie eigenständig gearbeitet haben, bestätigen Sie auf der Klausur durch den handschriftlichen Satz

Ich bestätige hiermit, daß ich die Klausur ohne Hilfe einer weiteren Person geschrieben habe.

und Ihrer Unterschrift auf der letzten Seite der Abgabe. Sie schreiben die Klausur *handschriftlich*, entweder auf Papier oder auf einer graphischen Oberfläche. Nach Fertigstellung der Klausur erstellen Sie eine einzelne pdf-Datei

(Option 1) indem Sie die handschriftlichen Papierseiten fotografieren und mit Hilfe eines Programms in eine einzelne pdf-Datei verwandeln (in diesem Fall achten Sie darauf, daß die Bilder leserlich sind und keine Seite fehlt), oder

(Option 2) indem Sie den elektronischen handschriftlichen Text in einer pdf-Datei abspeichern.

Diese pdf-Datei laden Sie dann als Abgabe im Moodle hoch. Für die Umwandlung der Klausur in pdf-Format und das Hochladen haben Sie 15 Minuten, so daß Sie bitte bis 13:45 Uhr Ihre Abgabe hochgeladen haben. Sollte es technische Probleme geben, melden Sie sich bitte umgehend per e-mail.

Struktur der Klausur. Die Klausur besteht aus zwei Teilen: der *Hauptaufgabe* und den *Zusatzaufgaben*.

Hauptaufgabe. Die Hauptaufgabe entscheidet über das Bestehen der Klausur und Sie sollten (mindestens) 45 bis 60 Minuten Ihrer Zeit auf die Hauptaufgabe verwenden. Fangen Sie nicht mit den Zusatzaufgaben an, bevor Sie mit Ihrem Ergebnis für die Hauptaufgabe zufrieden sind.

Ihre Bearbeitung der Hauptaufgabe sollte wohlstrukturiert sein: schreiben Sie nicht, was Ihnen als erstes in den Sinn kommt, sondern überlegen Sie sich erst, was Sie sagen wollen und wie sie es sagen wollen; skizzieren Sie die Struktur der Antwort; erst danach schreiben Sie Ihre Antwort.

Bei der Hauptaufgabe geht es nicht um technische Details, sondern um Ihr Verständnis. Sie dürfen Ergebnisse aus der Vorlesung ohne Beweis verwenden: falls Sie dies tun, verweisen Sie präzise (z.B. durch expliziten Verweis auf die Vorlesungsnotizen oder Gruppenarbeiten).

Eine angemessene Bearbeitung der Hauptaufgabe (alle wesentlichen Ideen sind angesprochen; keine schwerwiegenden Fehler) sorgt dafür, daß Sie die Klausur bestanden haben. Besonders gute Bearbeitungen der Hauptaufgabe verbessern die Gesamtnote.

Zusatzaufgaben. Erst nachdem Sie mit Ihrem Ergebnis bei der Hauptaufgabe zufrieden sind, bearbeiten Sie die drei Zusatzaufgaben. Diese tragen nicht zum Bestehen der Klausur, aber zur Gesamtnote bei. Für eine gute Klausurleistung sollten Sie zwei der Zusatzaufgaben mit Erfolg bearbeitet haben.

Wenn Sie alle drei Zusatzaufgaben bearbeiten wollen, sollten Sie zwischen 20 und 25 Minuten pro Aufgabe einplanen. Auch bei den Zusatzaufgaben dürfen Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden, wenn Sie sie exakt benennen und zitieren (mit Verweis auf die Vorlesungsnotizen oder Gruppenarbeitsbögen).

*

HAUPTAUFGABE. Beschreiben Sie die Relationen \leq_I und \leq_{Cons} (Implikationsstärke und Konsistenzstärke) und geben Sie ein Beispiele von großen Kardinalzahlaxiomen dafür, daß diese beiden Ordnungen im allgemeinen nicht übereinstimmen.

Sie müssen keine Beweisdetails geben, aber es sollte klar sein, welche Theoreme und welche Voraussetzungen verwendet werden. Wenn Sie Theoreme aus der Vorlesung verwenden, verweisen Sie explizit auf die Vorlesungsnotizen oder die Gruppenarbeitsbögen.

ZUSATZAUFGABEN.

- (1) Sei α eine Ordinalzahl und φ ein Satz der Sprache der Mengenlehre. Wir sagen φ ist eine *von Neumann-Beschreibung* von α , falls α die einzige Ordinalzahl ist, so daß $(\mathbf{V}_\alpha, \in) \models \varphi$. Wir sagen, daß α *von Neumann-beschreibbar* ist, falls eine von Neumann-Beschreibung von α existiert. Zeigen Sie, daß unerreichbare Kardinalzahlen nicht von Neumann-beschreibbar sind.
- (2) Sei λ unerreichbar und $\kappa < \lambda$ meßbar. Zeigen Sie, daß ein $\mu < \kappa$ existiert, so daß μ schwach kompakt ist.
- (3) Eine Kardinalzahl κ heißt *kleinste Verletzung der verallgemeinerten Kontinuumshypothese*, falls $2^\kappa > \kappa^+$, aber für alle $\lambda < \kappa$ gilt $2^\lambda = \lambda^+$. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß eine meßbare Kardinalzahl nicht die kleinste Verletzung der verallgemeinerten Kontinuumshypothese sein kann. Zeigen Sie, daß dies auch für Kardinalzahlen gilt, die schwach unerreichbar und nicht stark unerreichbar sind.