Gruppenarbeit #9

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Wir hatten in *Gruppenarbeit #8* angekündigt, daß in dieser Woche die Struktur $\mathfrak{H}$ weiter untersucht wird: das werden wir dann in Gruppenarbeit # 10 wieder aufnehmen. In dieser Gruppenarbeit geht es zunächst um reduzierte Produkte und Ultraprodukte. Wir betrachten in der gesamten Gruppenarbeit die Struktur $\mathfrak{O} := (\omega, \leq)$ und die Indexmenge $I = \mathbb{N}$. Falls F ein Filter auf I ist, so sei $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F) := \mathfrak{O}/{\sim_F}$ das reduzierte Produkt modulo F.

(1) Überlegen Sie sich, daß $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F)$ eine partielle Ordnung ist, also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch.

(2) Falls $n \in \omega$, so sei $c_n : I \to \omega$ die konstante Funktion mit Wert n. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\pi : \omega \to \mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F)$ mit $\pi(n) := [c_n]_F$ eine Einbettung (also ordnungserhaltende Injektion) ist.

(3) Falls F_{Fr} der *Fréchet-Filter* ist (also $X \in F$ genau dann, wenn das Komplement von X endlich ist), dann sind weder $E := \{2n\,;\, n \in \omega\}$ noch $O := \{2n+1\,;\, n \in \omega\}$ in F_{Fr}. Betrachten Sie die Funktion $e : I \to \omega$ definiert durch $e(2n) := 1$ und $e(2n+1) := 0$ und zeigen Sie, daß $[e]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ strikt zwischen $[c_0]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ und $[c_1]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ liegt (also $[c_0]_{F_{\mathrm{Fr}}} \leq [e]_{F_{\mathrm{Fr}}} \leq [c_1]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ und die $[c_0]_{F_{\mathrm{Fr}}} \neq [e]_{F_{\mathrm{Fr}}} \neq [c_1]_{F_{\mathrm{Fr}}}$).

(4) Definieren Sie eine analoge Funktion $o : I \to \omega$, so daß $[e]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ ebenfalls strikt zwischen $[c_0]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ und $[c_1]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ liegt, aber $[e]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ und $[o]_{F_{\mathrm{Fr}}}$ sind nicht vergleichbar. (Insbesondere ist $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F_{\mathrm{Fr}})$ keine lineare Ordnung).

(5) Zeigen Sie, daß die Identität $\mathrm{id} : I \to \omega : n \mapsto n$ im reduzierten Produkt modulo Fréchet-Filter größer ist als jede konstante Funktion.

(6) Definieren wir

$$i_k : I \to \omega : n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } n < k \text{ und} \\ n-k & \text{sonst,} \end{cases}$$

so bildet $\{[i_k]_{f_{\mathrm{Fr}}}\,;\, k \in \omega\}$ eine unendliche absteigende Kette in $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F_{\mathrm{Fr}})$. Jedes dieser Elemente ist strikt größer als jede Äquivalenzklasse einer konstanten Funktion. (Insbesondere ist $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F_{\mathrm{Fr}})$ nicht fundiert.)

(7) Finden Sie eine Teilmenge $A \subseteq \mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F_{\mathrm{F}})$, welche den Ordnungstyp ω^ω hat.

Hinweis. Verwenden Sie die Polynome in einer Variablen mit positiven ganzzahligen Koeffizienten.

(8) Betrachten Sie nun F_E, den Filter, der von $F_{\mathrm{Fr}} \cup \{E\}$ erzeugt wird. (Überlegen Sie sich zunächst, daß diese Menge die endliche Durchschnittseigenschaft hat.) Zeigen Sie nun, daß in $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, F_E)$ gilt, daß $[o]_{F_E} \lneqq [e]_{F_E}$.

(9) Definieren Sie wiederum analog einen Filter F_O, in dessen reduzierten Produkt gilt, daß $[e]_{F_O} \lneqq [o]_{F_O}$.

(10) Überlegen Sie sich, daß weder F_E noch F_O Ultrafilter sind. Finden Sie Funktionen $x, y : I \to \omega$, so daß $[x]_{F_E}$ und $[y]_{F_E}$ unvergleichbar sind (und ebenso für F_O).

(11) Verallgemeinern Sie das Argument von (7), indem Sie für jeden Filter F, welcher kein Ultrafilter ist, zwei Funktionen $x, y : I \to \omega$ konstruieren, deren F-Äquivalenzklassen im reduzierten Produkt nicht vergleichbar sind.

(12) Falls U ein Ultrafilter ist, muß $\mathrm{Red}(\mathfrak{O}, U)$ nach dem Satz von Łoś eine lineare Ordnung sein. Finden Sie eine Funktion $x : I \to \omega$ und zwei Ultrafilter U und V, welche beide den Fréchet-Filter erweitern, so daß $[x]_U$ gleich einer konstanten Funktion ist, aber $[x]_V$ größer ist als alle in der von Ihnen in (7) angegebenen Menge A vorkommenden Elemente.