Gruppenarbeit #10

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Wir setzen nun unsere Überlegungen zu abzählbaren Skolemhüllen aus Gruppenarbeit # 8 fort. Wiederum ist κ eine unerreichbare Kardinalzahl und $\mathfrak{V} := (\mathbf{V}_\kappa, \in)$. Wir bilden die abzählbare Skolemhülle $H := H^{\mathfrak{V}}(\varnothing)$ innerhalb von $\mathbf{V}_\kappa$, so daß $\mathfrak{H} := (H, \in) \prec \mathfrak{V} \models \mathsf{ZFC}$.

Wir hatten bereits gesehen, daß $\aleph_1 \in H$ und daß $\delta := \sup(\aleph_1 \cap H)$ eine abzählbare nicht definierbare Ordinalzahl ist (insbesondere ist $\delta \notin H$).

(1) Da δ abzählbar ist, gibt es konfinale Funktionen $g : \omega \to \delta$. Überlegen Sie sich, daß diese Funktionen nicht in H liegen können.

(2) Überlegen Sie sich, daß $\aleph_2$, $\aleph_3$, $\aleph_\omega$, $\aleph_{\omega_1}$ allesamt Elemente von H sind und daß für alle $\alpha < \omega_1$ gilt, daß $\aleph_\alpha \in H$ genau dann, wenn $\alpha \in H$. Insbesondere ist für $\delta \leq \beta < \omega_1$ die Kardinalzahl $\aleph_\beta$ nicht in H.

(3) Betrachten Sie $Y := \aleph_2 \cap H$. Dies ist eine abzählbare Menge von Ordinalzahlen und somit ist $\eta := \sup Y \cap H < \aleph_2$. Zeigen Sie, daß $\eta > \omega_1 + \delta$.

(4) Da $\eta < \aleph_2$ gibt es konfinale Funktionen $g : \omega_1 \to \eta$. Überlegen Sie sich, daß diese Funktionen nicht in H liegen können.

(5) Zeigen Sie, daß Y sehr große Lücken aufweist: es gibt $\xi_1, \xi_2 < \eta$, so daß das offene Intervall $(\xi_1, \xi_2) := \{\alpha < \omega_2\,; \xi_1 < \alpha < \xi_2\}$ überabzählbar ist und keine Elemente von Y enthält.

(6) Überlegen Sie sich, daß die Werte von δ und η von der in der Konstruktion der Skolemhülle verwendeten Skolemfunktion abhängen. Sei f eine Skolemfunktion und $\mathfrak{H}_f := (H_f, \in)$ die mit Hilfe von f definierte abzählbare Skolemhülle von $\varnothing$. Angenommen, wir haben $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_f$ für eine beliebig vorgegebene Skolemfunktion; wie können Sie die Skolemfunktion f zu einer Funktion f' modifizieren, so daß im Modell $\mathfrak{H}_{f'}$ die Werte von δ und η anders sind?

(7) Überlegen Sie sich, daß für jedes f gilt, daß $\lambda_f := \sup H_f \cap \kappa < \kappa$, aber daß das Supremum aller λ_f gerade gleich κ ist.

(8) Nach dem Satz von Mostowski gibt es eine transitive Menge T, so daß $(T, \in) \cong \mathfrak{H}$. Überlegen Sie sich, daß $T \subseteq \mathbf{V}_\kappa$ und daß für alle $\alpha > \omega$ gilt, daß $\mathbf{V}_\alpha^T \subsetneq \mathbf{V}_\alpha$.

(9) Seien $\delta^* := \text{o.t.}(\delta \cap H)$ und $\eta^* := \text{o.t.}(\eta \cap H)$. Zeigen Sie, daß $(T, \in) \models \delta^* = \aleph_1 \wedge \eta^* = \aleph_2$.

(10) Falls $A \in \mathbf{V}_\kappa$ und Sie bilden die Skolemhülle $H_A := H^{\mathfrak{V}}(A)$, so existiert eine transitive Menge T_A mit $(T_A, \in) \cong (H_A, \in)$ und es gilt $T_A \subseteq \mathbf{V}_\kappa$. Was können Sie in diesem Fall über δ und η sagen? (Bei geeigneter Wahl von A kann gelten, daß $\delta = \aleph_1$ und $\eta = \aleph_2$.)