Gruppenarbeit #7

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In der Vorlesung hatten wir Lévy-Paare kennengelernt: ein Paar (α, β) heißt *Lévy-Paar*, falls $\mathbf{V}_\alpha \prec \mathbf{V}_\beta$. Wir hatten bewiesen: wenn κ unerreichbar ist, so gibt es ein (sogar viele) λ, so daß (λ, κ) ein Lévy-Paar ist und es gibt Lévy-Paare (λ, λ'), bei denen weder die obere noch die untere Lévy-Zahl unerreichbar sind.

Der folgende Auszug stammt aus dem Artikel *A simple maximality principle* von Joel David Hamkins (*Journal of Symbolic Logic* **68**:2 (2003), 527–550:

> Let me motivate the first lemma by mentioning that if there is an inaccessible cardinal κ, then by the proof of the downward Lowenheim-Skolem Theorem, one can find a closed unbounded set $C \subseteq \kappa$ of cardinals δ with $V_\delta \prec V_\kappa$. The structure V_κ, therefore, is a model of ZFC with a cardinal δ such that V_δ is an elementary substructure of the universe. Axiomatizing this situation, let the expression "$V_\delta \prec V$" represent the scheme, in the language with an additional constant symbol for δ, which asserts of any statement φ in the language of set theory that
>
> $$\text{for every } x \in V_\delta, \text{ if } V_\delta \models \varphi[x], \text{ then } \varphi(x).$$
>
> Each such assertion in this scheme is first order, since one need only refer to satisfaction in a set structure, V_δ, and this is provided by Tarski's definition of the satisfaction relation. The little argument just given shows that if there is an inaccessible cardinal, then there is a model of ZFC satisfying the scheme $V_\delta \prec V$; indeed, since the club C provides whole towers of such δ, the consistency strength of $V_\delta \prec V$ is easily seen to be strictly less than the consistency of the existence of an inaccessible cardinal.
>
> The really amazing thing, however, is that in fact ZFC + $V_\delta \prec V$ is equiconsistent with ZFC. One might incorrectly guess that if ZFC holds in V and the scheme $V_\delta \prec V$ holds, then V knows that V_δ is a model of ZFC; but this conclusion would confuse the 'external' ZFC with the 'internal' ZFC of the model. What follows is only that V_δ satisfies any particular instance of an axiom of ZFC but not the formula asserting that V_δ satisfies the entire scheme ZFC. This subtle distinction is crucial, in view of the following elementary fact.[6]
>
> **Lemma 5.4** *If* ZFC *is consistent, then so is* ZFC + $V_\delta \prec V$.
>
> **Proof:** Assume that ZFC is consistent; so it has a model M. By the Lévy Reflection Theorem, every finite subcollection of the theory ZFC + $V_\delta \prec V$ is modeled in some rank initial segment of M, and therefore is consistent. So the whole theory is consistent. □

(1) Lesen Sie den kurzen Textauszug.

(2) Überlegen Sie sich, daß der erste Satz von Hamkins genau die Ergebnisse beschreibt, die wir in der Vorlesung gesehen haben. Hier heißt die Menge C *abgeschlossen (closed)*, falls für alle Limesordinalzahlen $\lambda < \kappa$ gilt: wenn C unbeschränkt in λ ist, so ist $\lambda \in C$.

(3) Lesen Sie den skizzenhaften Beweis von Lemma 5.4.

(4) Hamkins verwendet hier den sogenannten *Lévyschen Reflektionssatz*, den wir uns in der Vorlesung später noch genauer ansehen werden. In der üblichen Formulierung lautet er (z.B. Jech, *Set Theory*, Theorem 12.14:

> **Lévyscher Reflektionssatz.** Sei x eine Menge und Φ eine endliche Menge von Formeln. Dann gibt es eine transitive Menge $X \supseteq x$, so daß für alle $\varphi \in \Phi$ und alle $x_1, ..., x_n \in X$ gilt
>
> $$\varphi(x_1, ..., x_n) \iff (X, \in) \models \varphi(x_1, ..., x_n).$$

Überlegen Sie sich zunächst, warum dieser Satz impliziert, daß man stets annehmen kann, daß $X = \mathbf{V}_\alpha$ für ein geeignetes α.

(5) Formulieren Sie den skizzenhaften Beweis von Lemma 5.4 so präzise wie möglich unter Verwendung von (4).