Gruppenarbeit #6

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit betrachten wir die Erdős'sche Pfeilnotation, welche in der Vorlesung für den Begriff der schwachen Kompaktheit eingeführt wurde, genauer.

Wir wiederholen und verallgemeinern die Definition aus der Vorlesung: seien κ, λ, μ und ν Kardinalzahlen; wir schreiben $[X]^\nu$ für die Menge aller Teilmengen von $X \subseteq \kappa$ mit Kardinalität ν und nennen Funktionen $c : [X]^\nu \to \mu$ eine *Färbung mit μ Farben.* Falls c eine solche Färbung ist, so heißt $H \subseteq X$ *homogen für c*, falls c konstant auf $[H]^\nu$ ist. Wir schreiben

$$\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$$

für die Aussage "für jede Färbung $c : [\kappa]^\nu \to \mu$ gibt es eine homogene Teilmenge $H \subseteq \kappa$ der Kardinalität λ", ausgesprochen "κ pfeilt λ, ν, μ". Diese Notation nennt man auch die *Erdős'sche Pfeilnotation.*

(1) Überlegen Sie sich, daß die Erdős'sche Pfeilnotation monoton in den Kardinalzahlen links vom Pfeil und antiton in den Kardinalzahlen rechts vom Pfeil ist. Das heißt, falls $\kappa^* \geq \kappa$, $\lambda^* \leq \lambda$, $\nu^* \leq \nu$ und $\mu^* \leq \mu$ und $\kappa \to (\lambda)^\nu_\mu$, so gilt $\kappa^* \to (\lambda^*)^{\nu^*}_{\mu^*}$.

(2) Der *(unendliche) Satz von Ramsey* in dieser Notation besagt, daß für alle natürlichen Zahlen n und m gilt, daß $\omega \to (\omega)^n_m$. Wenn Sie diesen Satz noch nie gesehen haben, könnten Sie diese Gelegenheit nutzen, um sich ihn (und seinen Beweis) anzusehen.

In der endlichen Kombinatorik gibt es auch den *(endlichen) Satz von Ramsey*, welcher besagt, daß für alle Zahlen $k, n, m \in \mathbb{N}$ eine Zahl $r(k, n, m) \in \mathbb{N}$ existiert, so daß

$$r(k, n, m) \to (k)^n_m.$$

Beweisen Sie den endlichen Satz von Ramsey aus dem unendlichen Satz von Ramsey.

(3) Zeigen Sie, daß in ZFC, also unter Verwendung des Auswahlaxioms, der Exponent ν immer endlich sein muß, indem Sie zeigen, daß $\omega \not\to (\omega)^\omega_2$.

[*Hinweis.* Es sei R eine Wohlordnung auf $[\omega]^\omega$. Wir färben Elemente $A \in [\omega]^\omega$ wie folgt: $c(A) := 0$, falls A das R-kleinste Element von $[A]^\omega$ ist und $c(A) := 1$, sonst.]

(4) Sei nun $[X]^{<\omega} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [X]^n$ und $c : [X]^{<\omega} \to \mu$ eine Färbung aller endlichen Teilmengen von X. Schreiben Sie $\kappa \twoheadrightarrow (\lambda)^{<\omega}_\mu$ für "für jede Färbung $c : [\kappa]^{<\omega} \to \mu$ gibt es eine homogene Menge H der Kardinalität λ, also ein H, so daß $c{\restriction}[H]^{<\omega}$ konstant ist". Warum ist dies keine sinnvolle Definition? Wie kann man diese Definition abschwächen, um eine sinnvolle Definition von $\kappa \to (\lambda)^{<\omega}_\mu$ zu erhalten? (Hier heißt "sinnvoll" erst einmal nur "nicht offensichtlich widersprüchlich".)