Gruppenarbeit #5

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit schauen Sie sich eine andere Klasse von Modellen an: in der Vorlesung hatten wir uns Modelle der Form $\mathbf{V}_\alpha$ angesehen.

(1) Für eine Menge x bezeichnen wir den *transitiven Abschluß von x* (auch *transitive Hülle*) mit $\mathrm{TC}(x)$. Erinnern Sie sich an die rekursive Definition des transitiven Abschlusses und den Beweis seiner Existenz mittels Ersetzungsschema (Ebbinghaus, Aufgabe 2.11.11).

(2) Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Wir definieren $\mathbf{H}_\kappa := \{x\,;\, |\mathrm{TC}(x)| < \kappa\}$. Wir nennen die Elemente dieser Menge *erblich von Kardinalität* $< \kappa$. Wichtige Beispiele sind $\mathbf{HF} := \mathbf{H}_{\aleph_0}$, die *erblich endlichen Mengen*, und $\mathbf{HC} := \mathbf{H}_{\aleph_1}$, die *erblich abzählbaren Mengen*.

Überlegen Sie sich, daß für eine Menge $X \subseteq \mathbf{H}_\kappa$ mit $|X| < \kappa$ gilt, daß $X \in \mathbf{H}_\kappa$.

(3) Zeigen Sie, daß $\mathbf{H}_\kappa$ transitiv ist und daß $\mathbf{H}_\kappa \subseteq \mathbf{V}_\kappa$. (Erst nachdem Sie die letzte Behauptung gezeigt haben, wissen Sie, daß $\mathbf{H}_\kappa$ eine Menge ist.)

(4) Zeigen Sie mit Hilfe von $\in$-Induktion, daß $\mathbf{HF} = \mathbf{V}_\omega$.

[*Hinweis.* Wenden Sie $\in$-Induktion auf die Formel "$x \in \mathbf{V}_\omega \to x \in \mathbf{HF}$" an.]

(5) Überprüfen Sie, daß die Axiome(nschemata) der Extensionalität, Paarmenge, Vereinigung, und Aussonderung in jedem $\mathbf{H}_\kappa$ gelten. Für Aussonderung überlegen Sie sich (wie im Falle der von Neumann-Hierarchie), warum es keine Rolle spielt, daß wir nicht notwendigerweise wissen, was $\{y \in x\,;\, \mathbf{H}_\kappa \models \varphi(y)\}$ ist.

(6) Beweisen Sie, daß für jede Funktion $F : \mathbf{H}_\kappa \to \mathbf{H}_\kappa$ und $x \in \mathbf{H}_\kappa$ gilt, daß $\{F(y)\,;\, y \in x\} \in \mathbf{H}_\kappa$. Wie folgt daraus, daß das Axiomenschema der Ersetzung in $\mathbf{H}_\kappa$ gilt?

(7) Ohne es uns genauer anzusehen, wissen wir jetzt bereits, daß das Potenzmengenaxiom in $\mathbf{HC}$ nicht gelten kann. Warum? Geben Sie ein direktes Argument, warum das Potenzmengenaxiom in $\mathbf{HC}$ nicht gelten kann, indem Sie eine Menge finden, die in $\mathbf{HC}$ keine Potenzmenge hat.

[*Achtung.* Es reicht nicht aus, eine Potenzmenge einer Menge $x \in \mathbf{HC}$ anzugeben, die nicht in $\mathbf{HC}$ ist. Was müssen Sie zusätzlich zeigen?]

(8) Verallgemeinern Sie das Argument von (7), um zu zeigen, daß für jede Nachfolgerkardinalzahl $\aleph_{\alpha+1}$ gilt, daß $\mathbf{H}_{\aleph_{\alpha+1}}$ kein Modell des Potenzmengenaxioms ist.

(9) Was geschieht, wenn $\aleph_\lambda$ eine Limeszahl ist? Diskutieren Sie die Fälle "starker Limes" und "Limes, aber nicht starker Limes".