Gruppenarbeit #4

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit betrachten Sie normale und nicht-normale Operationen auf Kardinalzahlen. Zunächst erinnern wir uns an den Satz aus der Vorlesung:

Theorem. Eine Ordinalzahloperation F heißt *normal*, falls für alle $\alpha < \beta$ gilt, daß $F(\alpha) < F(\beta)$ und für alle Limesordinalzahlen λ gilt, daß $F(\lambda) = \bigcup_{\xi<\lambda} F(\xi)$. Jede normale Ordinalzahloperation hat beliebig große Fixpunkte, also η, so daß $F(\eta) = \eta$.

(1) Wir hatten uns in der Vorlesung die normalen Ordinalzahloperationen $\xi \mapsto \aleph_\xi$ und $\xi \mapsto \beth_\xi$ angesehen; deren Fixpunkte heißen *Aleph-Fixpunkte* und *Beth-Fixpunkte*. Sei κ eine reguläre Kardinalzahl. Zeigen Sie, daß es Aleph-Fixpunkte und Beth-Fixpunkte mit Konfinalität κ gibt.

[*Hinweis.* Sei φ_ξ der ξte Aleph-Fixpunkt. Zeigen Sie, daß $\mathrm{cf}(\varphi_\xi) = \mathrm{cf}(\xi)$ und ebenso für die Beth-Fixpunkte.]

(2) Zeigen Sie, daß eine Kardinalzahl κ genau dann ein starker Limes ist, falls es eine Limesordinalzahl λ gibt, so daß $\kappa = \beth_\lambda$. (Vergleichen Sie dies mit der Situation bei der Aleph-Operation.)

(3) Betrachten Sie die Operation $\xi \mapsto \varphi_\xi$ aus dem Hinweis zu (1). Überlegen Sie sich, daß dies eine normale Ordinalzahloperation ist und somit beliebig große Fixpunkte hat.

(4) Wir wollen Fixpunkte der Operation $\xi \mapsto \varphi_\xi$ *Hyper-Aleph-Fixpunkte* nennen. Zeigen Sie, daß jede unerreichbare Kardinalzahl ein Hyper-Aleph-Fixpunkt ist.

[*Hinweis.* Überlegen Sie sich, daß $\mathrm{cf}(\varphi_{\alpha+1}) = \aleph_0$ für alle α und verwenden Sie den Hinweis für (1).]

(5) Sei ϱ_ξ die ξte reguläre Kardinalzahl. Ist die Operation $\xi \mapsto \varrho_\xi$ normal?

(6) Zeigen Sie, daß eine Kardinalzahl κ genau dann schwach unerreichbar ist, wenn sie Fixpunkt der Operation ϱ ist, also $\kappa = \varrho_\kappa$.

(7) Sei σ_ξ die ξte singuläre Kardinalzahl. Also

$$\sigma_0 = \aleph_\omega = \aleph_{\omega\cdot(1+0)} \qquad \sigma_1 = \aleph_{\omega\cdot 2} = \aleph_{\omega\cdot(1+1)}$$
$$\sigma_2 = \aleph_{\omega\cdot 3} = \aleph_{\omega\cdot(1+2)} \qquad \ldots$$
$$\sigma_\omega = \aleph_{\omega\cdot\omega} = \aleph_{\omega\cdot(1+\omega)}$$

Können Sie im allgemeinen beweisen, daß $\sigma_\alpha = \aleph_{\omega\cdot(1+\alpha)}$? Was ist der Zusammenhang zwischen dieser Frage, der Normalität der Operation $\xi \mapsto \sigma_\xi$ und schwach unerreichbaren Kardinalzahlen?

(8) Nehmen Sie an, daß es unbeschränkt viele unerreichbare Kardinalzahlen gibt; also: für alle κ gibt es eine unerreichbare Kardinalzahl, die größer als κ ist. Sei ι_ξ die ξte unerreichbare Kardinalzahl. Kann man (in ZFC) beweisen, daß die (nicht normale) Operation $\xi \mapsto \iota_\xi$ Fixpunkte hat?