

# GRUPPENARBEIT #3

Modelle der Mengenlehre  
WS 2020/21 · Universität Hamburg  
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit untersuchen Sie Skolemhüllen in den reellen und komplexen Zahlen. Wir betrachten

$$\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, 0, 1) \text{ und } \mathfrak{C} := (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1).$$

Wie in der Vorlesung konstruieren wir die Skolemhülle einer Menge  $X$  innerhalb einer Struktur  $\mathfrak{A}$  durch die rekursive Definition

$$\begin{aligned} H_0^{\mathfrak{A}}(X) &:= X, \\ H_{i+1}^{\mathfrak{A}}(X) &:= H_i^{\mathfrak{A}}(X) \cup T(H_i^{\mathfrak{A}}(X)) \cup S(H_i^{\mathfrak{A}}(X)), \\ H^{\mathfrak{A}}(X) &:= \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i^{\mathfrak{A}}(X), \end{aligned}$$

wobei die Operation  $S$  von der vorgegebenen Skolemfunktion auf  $\mathfrak{A}$  abhängt; s. (5).

- (1) Betrachten Sie zunächst die Skolemhülle der leeren Menge  $H^{\mathfrak{R}}(\emptyset)$  und überlegen Sie sich, auf welcher Stufe der Konstruktion die folgenden reellen Zahlen in die Skolemhülle aufgenommen werden:  $17$ ,  $-2$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $-\frac{12}{13}$ ,  $\sqrt{2}$ .
- (2) Im Falle von  $\sqrt{2}$  überlegen Sie sich, dass die Formel  $\exists x(x \cdot x = 1 + 1)$  keine eindeutige Lösung hat. Wie stellen Sie sicher, daß die Skolemfunktion die *positive* Lösung wählt?
- (3) Beweisen Sie, daß die Skolemhülle  $H^{\mathfrak{R}}(\emptyset)$  alle algebraischen reellen Zahlen enthält.
- (4) Überlegen Sie sich, daß man (3) leicht verallgemeinern kann: ist  $X$  eine Menge reeller Zahlen, so enthält die Skolemhülle  $H^{\mathfrak{R}}(X)$  alle Zahlen, die algebraisch über  $X$  sind.
- (5) Die Skolemhülle hängt von der Wahl der vorgegebenen Skolemfunktion ab. Überlegen Sie sich, wie man durch Modifikation der Skolemfunktion eine andere Skolemhülle bekommt: sei  $f^*$  eine zweite Skolemfunktion mit der entsprechenden Operation  $S^*$  und dadurch rekursiv definierten Mengen  $H_*^{\mathfrak{R}}(\emptyset)$ ; finden Sie  $f^*$ , so daß  $H^{\mathfrak{R}}(\emptyset) \neq H_*^{\mathfrak{R}}(\emptyset)$ .
- (6) Überlegen Sie sich, daß wegen (5) die Skolemhülle  $H^{\mathfrak{R}}(\emptyset)$  nicht notwendigerweise die Menge aller algebraischen reellen Zahlen ist.

[Mit etwas mehr Modelltheorie kann man zeigen, daß sie bei geeigneter Wahl der Skolemfunktion die Menge aller algebraischen reellen Zahlen sein kann. Das entsprechende modelltheoretische Stichwort ist: "Die Theorie der reell abgeschlossenen Körper ist vollständig."]

- (7) Betrachten Sie nun die Skolemhülle  $H^{\mathfrak{C}}(\emptyset)$  und überlegen sich, auf welcher Stufe der Konstruktion die imaginäre Einheit  $i$  in die Skolemhülle aufgenommen wird.
- (8) In Analogie zu (3) und (4) stellen Sie fest, daß der algebraische Abschluß  $\overline{\mathbb{Q}}$  von  $\mathbb{Q}$  eine Teilmenge von  $H^{\mathfrak{C}}(\emptyset)$  ist und daß  $H^{\mathfrak{C}}(\emptyset)$  einen abzählbaren algebraisch abgeschlossenen Unterkörper von  $\mathfrak{C}$  bildet, der möglicherweise echt größer ist als  $\overline{\mathbb{Q}}$ .

[Wiederum gilt, daß die Skolemhülle bei geeigneter Wahl der Skolemfunktion die Menge  $\overline{\mathbb{Q}}$  sein kann. Das entsprechende modelltheoretische Stichwort ist: "Die Theorie der algebraisch abgeschlossenen Körper ist vollständig."]

- (9) Bestimmen Sie  $H^{\mathfrak{C}}(\mathbb{R})$  und  $H^{\mathfrak{C}}([0, 1])$ .