Gruppenarbeit #2

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit untersuchen Sie modelltheoretische Eigenschaften der Theorie IIEC, die wir in der Vorlesung gesehen hatten. Die Grundsymbolmenge ist $S = \{E\}$ mit einem binären Relationssymbol und wir haben die Axiome

$$\begin{aligned}
\forall x \quad & \neg x \; E \; x, \\
\forall x \forall y \forall z \quad & (x \; E \; y \wedge y \; E \; z) \to x \; E \; z, \\
\forall x \forall y \quad & x \; E \; y \to y \; E \; x, \\
\exists x_1 \ldots \exists x_n \quad & \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \; E \; x_j, && (\varphi^1_{\geq n}) \\
\forall x_0 \exists x_1 \ldots \exists x_n \quad & \bigwedge_{i=1}^{n} x_0 \; E \; x_i \wedge \bigwedge_{i \neq j} x_i \neq x_j. && (\varphi^2_{\geq n})
\end{aligned}$$

In der Vorlesung haben wir gezeigt, daß die Theorie IIEC $\aleph_0$-kategorisch ist und somit vollständig. Für diese Gruppenarbeit wollen wir die folgenden paarweise disjunkten Mengen vorgeben:

(i) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $X_n := \{x_{n,0}, ..., x_{n,n-1}\}$ mit n Elementen;

(ii) für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine abzählbare Menge $Y_n := \{y_{ni} \, ; \, i \in \mathbb{N}\}$; und

(iii) für jedes $\alpha \in \aleph_1$ eine Menge $Z_\alpha := \{z_{\alpha\beta} \, ; \, \beta \in \aleph_1\}$ der Kardinaliät $\aleph_1$.

Die in diesen Mengen vorkommenden Elemente seien paarweise verschieden. Auf der Menge

$$A := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cup \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} Z_\alpha$$

definieren wir die folgende Äquivalenzrelation R: $u \; R \; v$ genau dann, wenn es ein n oder ein α gibt, so daß u und v beide aus X_n oder beide aus Y_n oder beide aus Z_α sind. Wir betrachten sieben Unterstrukturen von $\mathfrak{A} := (A, R)$:

$$A_X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n, \qquad A_Y := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \qquad A_Z := \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} Z_\alpha,$$

$$A_{XY} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n, \qquad A_{XZ} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cup \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} Z_\alpha, \qquad A_{YZ} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cup \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} Z_\alpha,$$

$$A_{XYZ} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n \cup \bigcup_{\alpha \in \aleph_1} Z_\alpha.$$

(1) Überprüfen Sie, welche der sieben Strukturen Modelle von IIER sind.

(2) Welche der sieben Strukturen sind isomorph zueinander?

(3) Welche der sieben Strukturen sind elementar äquivalent miteinander?

(4) Zeigen Sie die folgende Behauptung per Induktion über den Formelaufbau:

Es seien $\mathfrak{B} = (B, \mathrel{\overset{\circ}{=}})$ und $\mathfrak{C} = (C, \mathrel{\overset{\frown}{=}})$ zwei Modelle von IIER. Falls $\vec{b} := (b_0, ..., b_n) \in B^{n+1}$ und $\vec{c} := (c_0, ..., c_n) \in C^{n+1}$, so sagen wir, daß die Tupel *in gleicher atomarer Position* sind, falls die folgenden Bedingungen gelten: $b_i = b_j \iff c_i = c_j$ und $b_i \mathrel{\overset{\circ}{=}} b_j \iff c_i \mathrel{\overset{\frown}{=}} c_j$. Es sei φ eine beliebige S-Formel mit $n+1$ freien Variablen und $\vec{b}$ und $\vec{c}$ in gleicher atomarer Position. Dann gilt

$$\mathfrak{B} \models \varphi(\vec{b}) \text{ genau dann, wenn } \mathfrak{C} \models \varphi(\vec{c}).$$

Beachten Sie in Ihrem Beweis, an welcher Stelle Sie verwenden, daß $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Modelle von IIER sind. Kann diese Behauptung auch für andere Modelle gelten (z.B. die Modelle aus (1), welche keine Modelle von IIER sind)?

(5) Erweitern Sie die Symbolmenge um abzählbar viele Konstantensymbole und arbeiten Sie mit der Symbolmenge $S^* := S \cup \{c_i\,;\, i \in \mathbb{N}\}$. Betrachten Sie $\Psi_0 := \{c_i \neq c_j\,;\, i \neq j\}$. Ist $\mathsf{IIER} \cup \Psi_0$ vollständig?

(6) In derselben Spracherweiterung S^* betrachten Sie $\Psi_1 := \{\neg c_i \; E \; c_j\,;\, i \neq j\}$. Ist die Theorie $\mathsf{IIER} \cup \Psi_1$ $\aleph_0$-kategorisch? Ist sie vollständig?

(7) Sei π_1 die Identität auf A_Y. Wir können π_1 als Funktion von A_Y nach A_Y, A_{XY}, A_{YZ} oder A_{XYZ} auffassen. Untersuchen Sie die modelltheoretischen Eigenschaften dieser vier Abbildungen. Sind sie Einbettungen, elementare Einbettungen, oder Isomorphismen?

(8) Sei $\pi_2 : y_{ni} \mapsto y_{2n,2i}$. Untersuchen Sie die modelltheoretischen Eigenschaften von π_2 wie in (7).

(9) Sei $\pi_3 : y_{ni} \mapsto y_{n+i,i}$. Untersuchen Sie die modelltheoretischen Eigenschaften von π_3 wie in (7).

(10) Sei $\pi_4 : y_{ni} \mapsto z_{ni}$. Diese Abbildung können wir als Funktion von A_Y nach A_Z, A_{XZ}, A_{YZ} oder A_{XYZ} auffassen. Untersuchen Sie wiederum die modelltheoretischen Eigenschaften von π_4 wie in (7).