Gruppenarbeit #12

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Wir arbeiten weiterhin im Kontext von § 12 der Vorlesung: λ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl, $\kappa < \lambda$ ist meßbar mit κ-vollständigem freien Ultrafilter U. Nach Mostowski gibt es ein inneres Modell $\mathfrak{M} := (M, \in)$ mit $M \subseteq \mathbf{V}_\lambda$ transitiv und $\mathfrak{M} \cong \mathrm{Ult}(\mathfrak{V}, U)$. Wir schreiben $j : \mathbf{V}_\lambda \to M$ für die elementare Einbettung $x \mapsto [c_x]$. In der Vorlesung und in Gruppenarbeit # 11 hatten wir gezeigt, daß

(i) $\mathbf{V}_{\kappa+1} \subseteq M$,

(ii) falls $s : \kappa \to M$ eine Folge von Elementen von M der Länge κ ist, so ist $s \in M$.

Wir zeigen nun, daß diese beiden Abschlußeigenschaften von M nicht wesentlich verbessert werden können.

(1) Sei $\alpha < \kappa^+$ und $s : \alpha \to M$. Zeigen Sie, daß $s \in M$.
[*Hinweis.* Für jedes $\alpha < \kappa^+$ existiert eine Surjektion von κ nach α, die in M liegt. Warum?]

(2) Sei $f : \kappa \to \kappa^+$ eine Funktion. Verwenden Sie die Regularität von κ^+, um zu zeigen, daß es ein $\alpha < \kappa^+$ geben muß, so daß $[f] < [c_\alpha]$.

(3) Folgern Sie aus (2), daß die Menge $\{j(\alpha)\,;\,\alpha < \kappa^+\}$ konfinal in $j(\kappa^+)$ liegt.

(4) Definieren Sie $s : \kappa^+ \to M$ durch $s(\alpha) := j(\alpha)$ und folgern Sie aus (3), daß $s \notin M$.
[*Hinweis.* Verwenden Sie, daß $\mathfrak{M} \models$ "$j(\kappa^+)$ ist regulär und $\kappa^+ < j(\kappa^+)$".]

Aus (1) und (4) folgt also, daß M nicht unter Bildung von Folgen der Länge κ^+, aber unter Bildung aller kürzerer Folgen abgeschlossen ist.

(5) Sei W ein beliebiger Ultrafilter auf κ und $\sim_W$ die folgende Relation, definiert auf der Menge κ^κ: $f \sim_W g$ genau dann, wenn $\{\alpha\,;\,f(\alpha) = g(\alpha)\} \in W$. Auf den $\sim_W$-Äquivalenzklassen definieren wir die Relation $<_W$ durch $[f] <_W [g]$ genau dann, wenn $\{\alpha\,;\,f(\alpha) < g(\alpha)\} \in W$. Überlegen Sie sich, daß $W \in M$ impliziert, daß die Quotientenstruktur $Q_W := (\kappa^\kappa/{\sim_W}, <_W)$ ein Element von M ist.

(6) Mit den Definitionen aus (5) zeigen Sie: falls $W \in M$ und $\mathfrak{V} \models$"Q_W ist eine Wohlordnung", so gilt $\mathfrak{M} \models$"Q_W ist eine Wohlordnung". Insbesondere: falls γ der Ordnungstyp von Q_W ist, so gibt es in M eine Surjektion von κ^κ auf γ.

(7) Nun betrachten Sie den Fall $W = U$ (also der Ultrafilter, mit dem M gebildet wurde). Folgern Sie aus (6): falls $U \in M$, so existiert eine Surjektion von κ^κ auf $j(\kappa)$. Warum impliziert dies $U \notin M$?

Aus (7) folgt direkt, daß grundsätzlich $\mathbf{V}_{\kappa+2} \not\subseteq M$.