Gruppenarbeit #11

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

Wir arbeiten im Kontext von § 12 der Vorlesung: λ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl, $\kappa < \lambda$ ist meßbar mit κ-vollständigem freien Ultrafilter U. Nach Mostowski gibt es ein inneres Modell $\mathfrak{M} := (M, \in)$ mit $M \subseteq \mathbf{V}_\lambda$ transitiv und $\mathfrak{M} \cong \mathrm{Ult}(\mathfrak{V}, U)$. Wir schreiben $j : \mathbf{V}_\lambda \to M$ für die elementare Einbettung $x \mapsto [c_x]$. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, daß

(i) $\mathbf{V}_{\kappa+1} \subseteq M$,

(ii) $\wp(\kappa) \in M$,

(iii) κ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl in $\mathfrak{M}$ und κ^+ ist ihr Nachfolger in $\mathfrak{M}$,

(iv) κ ist der kritische Punkt von j und $j(\kappa)$ ist eine meßbare Kardinalzahl.

$\ast$

(1) Da $\mathfrak{M}$ ein Modell von ZFC ist, gibt es eine Ordinalzahl γ, so daß $\mathfrak{M} \models |\wp(\kappa)| = \gamma$. Überlegen Sie sich, daß in $\mathfrak{V}$ gilt, daß $2^\kappa \leq \gamma < (2^\kappa)^+$.

[*Hinweis.* Verwenden Sie (ii).]

(2) Verwenden Sie (iv), um zu zeigen, daß $\gamma < j(\kappa)$.

(3) Falls $[f] \in j(\kappa)$, so ist f ohne Beschränkung der Allgemeinheit eine Funktion von κ nach κ. Verwenden Sie diese Tatsache, um zu zeigen, daß in $\mathfrak{V}$ die Kardinalität von $j(\kappa)$ höchstens 2^κ sein kann. Also gilt:

$$2^\kappa \leq \gamma < j(\kappa) < (2^\kappa)^+.$$

(4) Aus (3) folgt, daß $\mathfrak{V}$-Kardinalität von $j(\kappa)$ genau 2^κ ist und insbesondere, daß $j(\kappa)$ *keine* Kardinalzahl in $\mathfrak{V}$ ist. Zeigen Sie, daß eine Menge K mit $|K| = 2^\kappa$ von Ordinalzahlen gibt, so daß jedes Element von K eine Kardinalzahl in $\mathfrak{M}$, aber nicht in $\mathfrak{V}$ ist.

[*Hinweis.* In $\mathfrak{M}$ haben wir, daß $\gamma < j(\kappa)$ und $j(\kappa)$ ist eine stark unerreichbare Kardinalzahl (insbesondere $j(\kappa) = \aleph_{j(\kappa)}$). Wieviele $\mathfrak{M}$-Kardinalzahlen gibt es also zwischen γ und $j(\kappa)$?]

(5) Da M transitiv ist und $\kappa < j(\kappa)$, gibt es eine Funktion $h : \kappa \to \kappa$ mit $[h] = \kappa$. Sei $s : \kappa \to M$ eine beliebige Funktion: wir wählen Repräsentanten für die Werte von s, also $s(\alpha) = [f_\alpha]$. Nun definieren wir eine Funktion $f : \kappa \to \mathbf{V}_\lambda$ wie folgt: für jedes $\beta \in \kappa$ sei $f(\beta)$ eine Funktion mit Urbildbereich $h(\beta)$ und für $\alpha \in h(\beta)$ setzen wir $f(\beta)(\alpha) := f_\alpha(\beta)$.

Zeigen Sie, daß $s = [f]$. Insbesondere ist $s \in M$.