Gruppenarbeit #1

Modelle der Mengenlehre
WS 2020/21 · Universität Hamburg
Prof. Dr. Benedikt Löwe

In dieser Gruppenarbeit behandeln Sie den *Satz von Hessenberg* und seine Konsequenzen. Sie können in ZFC arbeiten und das Auswahlaxiom verwenden. Allerdings ist es für (1) bis (3) irrelevant; bei (4) reicht es, anzunehmen, daß die Menge S wohlordenbar ist. Wenn Sie Zeit und Energie haben, können Sie sich überlegen, wie Sie evtl. Anwendungen des Auswahlaxioms in Ihren Beweisen vermeiden können.

Der folgende Auszug stammt aus dem Buch *Set Theory* von Thomas Jech (S. 30f):

The Canonical Well-Ordering of $\alpha \times \alpha$

We define a well-ordering of the class $Ord \times Ord$ of ordinal pairs. Under this well-ordering, each $\alpha \times \alpha$ is an initial segment of Ord^2; the induced well-ordering of α^2 is called the *canonical well-ordering* of α^2. Moreover, the well-ordered class Ord^2 is isomorphic to the class Ord, and we have a one-to-one function Γ of Ord^2 onto Ord. For many α's the order-type of $\alpha \times \alpha$ is α; in particular for those α that are alephs.

We define:

$$(3.12)\qquad (\alpha,\beta) < (\gamma,\delta) \leftrightarrow \begin{aligned}[t] &\text{either } \max\{\alpha,\beta\} < \max\{\gamma,\delta\},\\ &\text{or } \max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\} \text{ and } \alpha < \gamma,\\ &\text{or } \max\{\alpha,\beta\} = \max\{\gamma,\delta\},\ \alpha = \gamma \text{ and } \beta < \delta.\end{aligned}$$

The relation $<$ defined in (3.12) is a linear ordering of the class $Ord \times Ord$. Moreover, if $X \subset Ord \times Ord$ is nonempty, then X has a least element. Also, for each α, $\alpha \times \alpha$ is the initial segment given by $(0,\alpha)$. If we let

$$\Gamma(\alpha,\beta) = \text{the order-type of the set } \{(\xi,\eta) : (\xi,\eta) < (\alpha,\beta)\},$$

then Γ is a one-to-one mapping of Ord^2 onto Ord, and

$$(3.13)\qquad (\alpha,\beta) < (\gamma,\delta) \quad \text{if and only if} \quad \Gamma(\alpha,\beta) < \Gamma(\gamma,\delta).$$

(1) Fertigen Sie eine Zeichnung an, um die Funktion Γ zu verstehen. Berechnen Sie die Werte $\Gamma(2,2)$, $\Gamma(3,3)$, $\Gamma(4,4)$, $\Gamma(0,\omega)$, $\Gamma(\omega,0)$, $\Gamma(\omega,\omega)$, $\Gamma(\omega,\omega+1)$ und $\Gamma(\omega+3,\omega+3)$.

(2) Überprüfen Sie Jechs Behauptungen im obigen Textauszug:

   (a) $<$ ist eine totale Ordnung,

(b) falls X eine nichtleere Menge von Ordinalzahlpaaren ist, so hat X ein $<$-minimales Element und

(c) für eine gegebene Ordinalzahl α gilt, daß $\alpha \times \alpha = {<}[(0, \alpha)] := \{(\gamma, \delta)\,;\, (\gamma, \delta) < (0, \alpha)\}$.

(3) Verwenden Sie die Funktion Γ, um den *Satz von Hessenberg* zu beweisen: für jede unendliche Ordinalzahl α gibt es eine Bijektion zwischen $\alpha \times \alpha$ und α.

[*Hinweis.* Es reicht, dies für Kardinalzahlen $\aleph_\gamma$ zu zeigen (warum?). Für diese zeige man es per Induktion über γ.]

(4) Verwenden Sie (3), um zu zeigen, daß für eine Symbolmenge S gilt, daß $|T^S| \leq \max(\aleph_0, |S|)$. Warum kann man in dieser Behauptung nicht einfach "$|T^S| \leq |S|$" oder "$|T^S| = \max(\aleph_0, |S|)$" schreiben?

[*Hinweis.* Zeigen Sie mit (3), daß für eine Menge X der Kardinalität $\kappa \geq \aleph_0$ gilt, daß für jede positive natürliche Zahl n gilt, daß $|X^n| = \kappa$. Finden Sie eine Surjektion von $\aleph_0 \times \kappa$ auf die Menge der endlichen Folgen von Elementen aus X. Warum reicht dies?]