Determiniertheit

LECTIO ULTIMA XII

Zwölfte Vorlesung: 17. Juli 2025

Borel-Wadge-Hierarchie
Volle Wadge-Hierarchie [+ AD]

Grundsätzliche Frage

STRUKTUR DER WADGE-HIERARCHIE

- Semi-linear (Wadge-Lemma)
- Fundiert ?!?
- Was geschieht an Nachfolgern & Limiten?

Selbstdual: $A \leq_W X \setminus A$

Nichtselbstdual(es Paar): $A \not\leq_W X \setminus A$

Hierzu: Hierarchieverfeinerung (§16) & Lipschitzhierarchie

$$G(A,B) \quad \begin{array}{lcccccc} \mathrm{I} & x_0 & x_1 & x_2 & \cdots & x \\ \mathrm{II} & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y \end{array}$$

II gewinnt, falls $x \in A \Leftrightarrow y \in B$

Lipschitz-Spiel: OHNE WARTEN

Wadge-Spiel: Spieler II darf warten

$A \leq_L B \Longrightarrow A \leq_W B$ (Verfeinerung)

Falls $\leq_L$ fundiert ist, so ist $\leq_W$ fundiert.

Theorem Die (Borel-) Lipschitz-Hierarchie ist fundiert.
(Martin-Monk) ← Leonard Monk

Beweis Angenommen $\{A_n ; n \in \mathbb{N}\}$ ist $<_L$-absteigende Kette:

$$\forall n \quad A_{n+1} <_L A_n \Rightarrow A_n \not\leq_L A_{n+1}$$

In $G_L(A_n, A_{n+1})$ hat II keine GS. Also hat I eine.

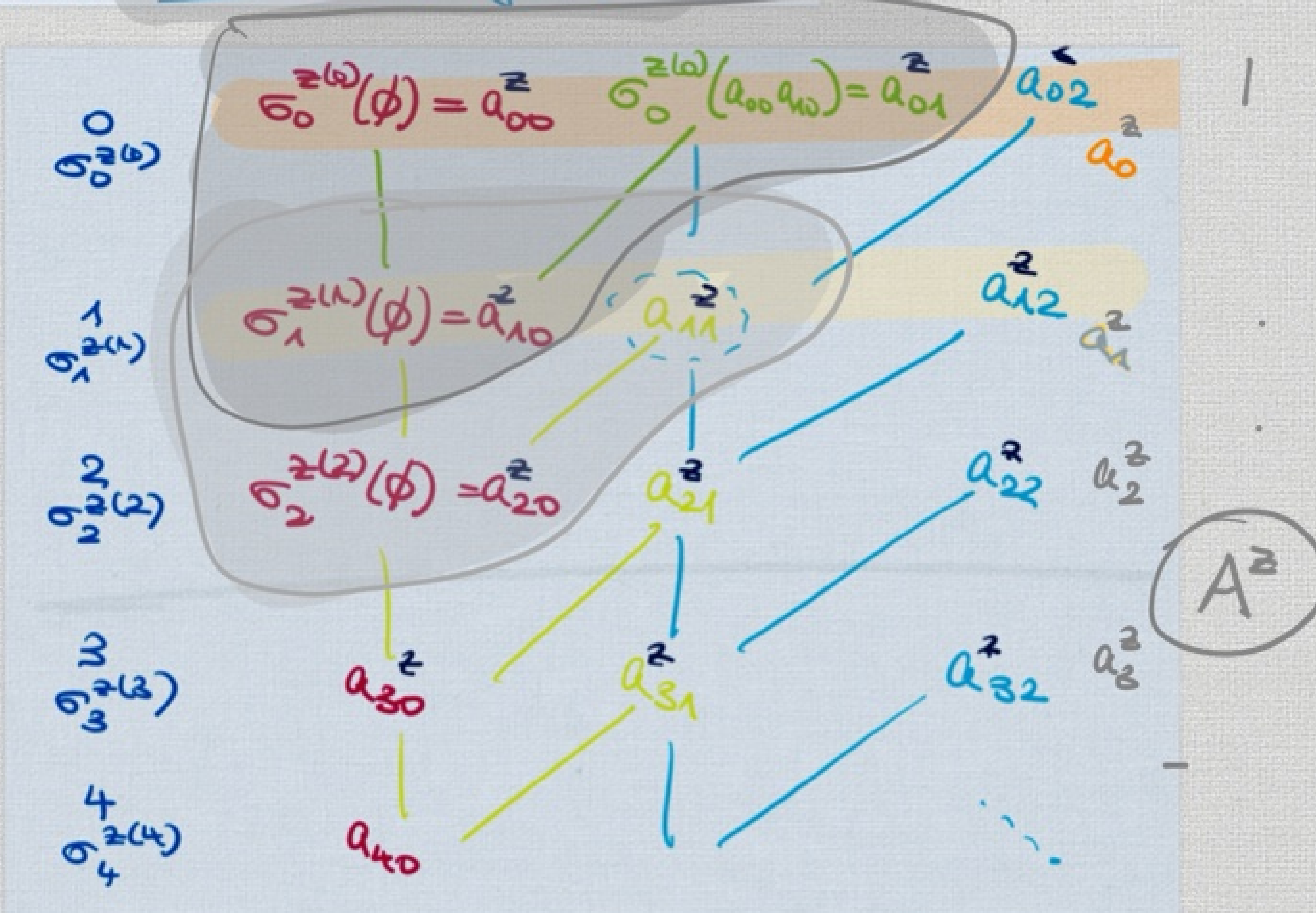
Wie zuvor gilt auch $A_{n+1} <_L X \setminus A_n$.
Insbesondere gibt es GS für Sp. I in

$G_L(A_n, A_{n+1})$ σ_n^0

$G_L(X\setminus A_n, A_{n+1})$ σ_n^1

$z(0) = 0/1$ $\rightsquigarrow$ in Zeile 0 wird σ_0^0/σ_0^1 verwendet

Wir werden für jedes $z: \mathbb{N} \to 2$ eine $\omega\times\omega$-Matrix A^z konstruieren, die wir das Martin-Monk-Diagramm nennen.



$$A^z := (a^z_{ij} ; i,j \in \mathbb{N}).$$

Wir setzen a^z_i : die i-te Zeile dieser Matrix.

Es gilt:

falls $z(i) = 0$, so ist
$$a^z_i \in A_i \iff a^z_{i+1} \notin A_{i+1}$$
falls $z(i) = 1$, so ist
$$a^z_i \in A_i \iff a^z_{i+1} \in A_{i+1}.$$
(*)

Stimmen z & z' ab N überein, so sind alle Zeilen von A^z und $A^{z'}$ hinter N identisch.

Falls $\forall n \geq N$ gilt: $z(n) = z'(n)$, dann gilt:
$$\forall n \geq N \quad a^z_n = a^{z'}_n. \qquad (**)$$
[Einfache Induktion!]

Gilt nun $z(N) \neq z'(N)$ aber $\forall n > N$ $z(n) = z'(n)$,

so gilt $a^z_N \in A_N \iff a^{z'}_N \notin A_N$

[Folgt direkt aus (*) & (**).]

Ist also z ein Flipp von z', so gilt durch iteratives Anwenden von (*) :
$$a^z_0 \in A_0 \iff a^{z'}_0 \notin A_0 \qquad (***)$$

Korollar $F := \{ z ; a_0^z \in A_0 \}$ ist eine Flippmenge.

[Direkt aus (***).]

Wir hatten gezeigt, daß keine Borel-Flippmenge existieren. Also reicht es für den Widerspruch, zu zeigen, daß F Borel ist.

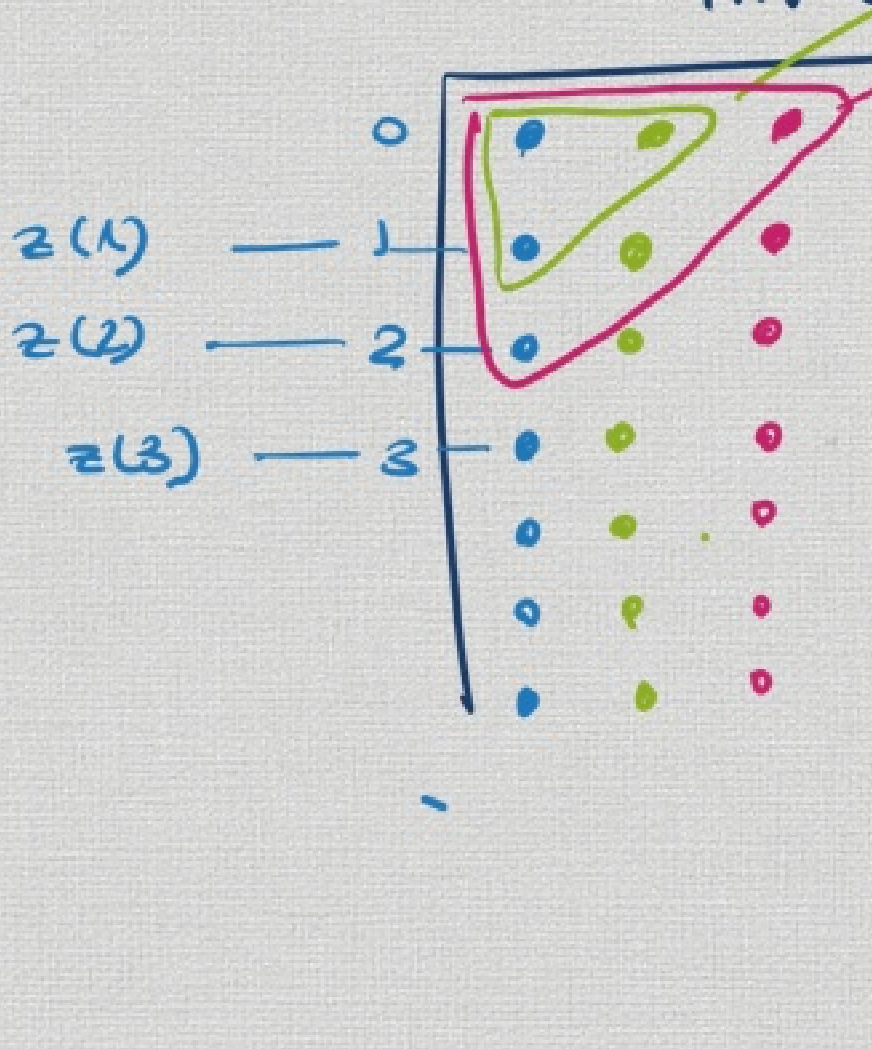
Sicherlich ist A_0 Borel; schreibe

$$F = f^{-1}[A_0]$$

mit $f(z) = a_0^z$.

Warum ist f stetig? Wir zeigen hierzu, daß a_0^z durch endliche Werte von z bestimmt ist.

MM-Diagramm



Allgemein a_{ij}^z von den Werten $z(k)$ für $k \leq i+j$ ab.

Also ist f stetig. Somit F Borel. Widerspruch! q.e.d.

Bemerkung Dies bedeutet, daß die Borel-Wadge-Hierarchie einfach nur eine Ordinalzahl zusammen mit einer Zuordnung, an welchen Stellen sich die nsd Paare befinden, ist.

Wir schreiben L_α, W_α für die Lipschitz-/Wadgegrade der Stufe α.

Zwei Fragen verbleiben:

(1) Wie hoch ist die Hierarchie?
[Nicht in dieser VL diskutiert.]

(2) Wo liegen die nsd Paare in der Hierarchie?

§ 18 Die nsd Paare in der Lipschitzhierarchie.

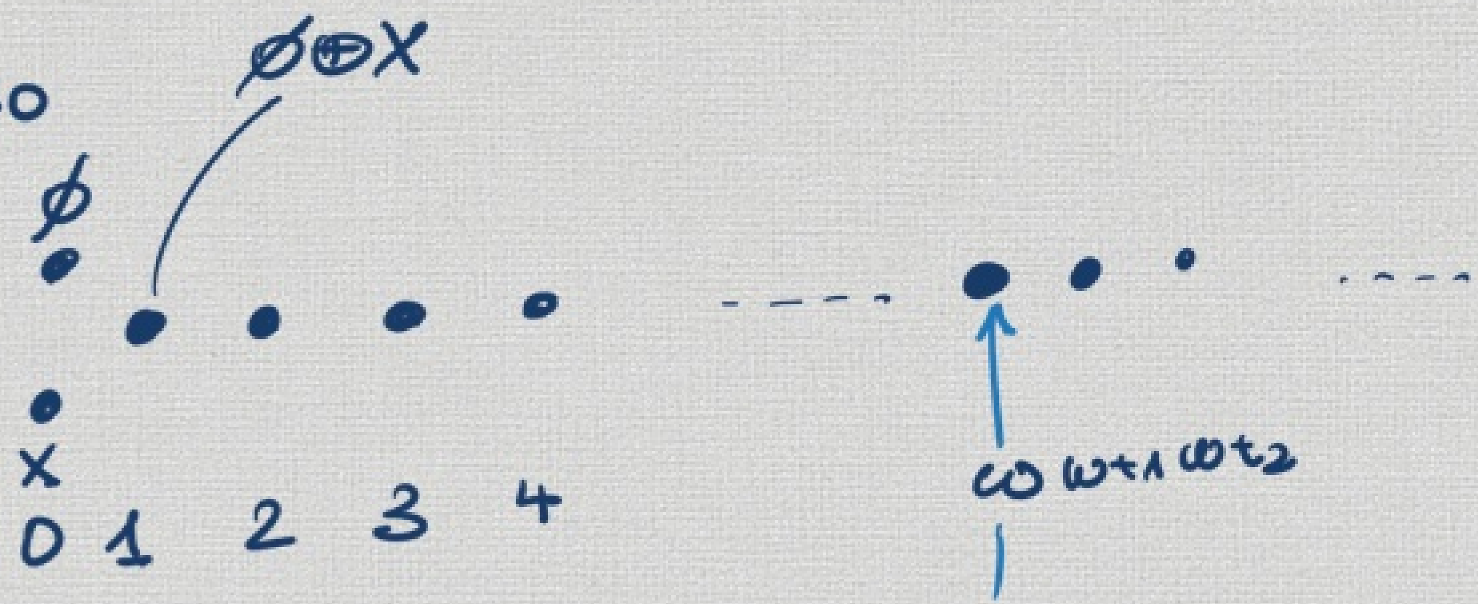
Nachfolger Falls L_α nsd, so ist $L_{\alpha+1}$ sd: $A \not\equiv_L X\setminus A$, so hat $A \oplus X\setminus A$ den Lipschitzgrad $L_{\alpha+1}$.

Ist allerdings L_α selbstdual und $A \in L_\alpha$ und $n \in \mathbb{N}$ beliebig, so gilt $nA := \{nx;\, x\in A\}$ ist der Lipschitznachfolger von A, also

$$nA \in L_{\alpha+1}.$$

Einfach zu sehen: nA ist selbstdual.

Also



Auch an der Stelle ω wissen wir, was passiert: falls $A_n \in L_n$, so ist $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ das $\leq_L$-Supremum, so $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \in L_\omega$.

Und es ist selbstdual.

<u>Korollar</u> Falls α mit $\mathrm{cf}(\alpha) = \omega$, so gilt, daß L_α selbstdual ist.

Diese Beobachtung können wir umdrehen:

Falls $A \subseteq X$, so schreiben wir

$$A_{(n)} := \{x \,;\, nx \in A\}$$

Offensichtlich gilt

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_{(n)} = A.$$

Also gilt: Falls $A_{(n)} <_L A$, so ist A selbstdual

Satz Ist A sd, so gilt $\forall u$ $A_{(u)} <_L A$.

Beweis. Offensichtlich: $A_{(u)} \leq_L A$.

$\{x;\ ux \in A\}$

Spiele u im ersten Zug und kopiere Spiel I mit Verzögerung.

Zu zeigen: II hat keine GS in $G_L(A, A_{(u)})$.

Da A sd ist, ex. eine GS τ für II in $G_L(A, X \setminus A)$.

GS für I: Hilfsspiel

$G_L(A, A_{(u)})$ $\quad \mathrm{I}: \quad x_0 \qquad x_1$

$\qquad\qquad\qquad \mathrm{II}: \quad y_0$

$\mathrm{I}: \quad u \qquad y_0$

$\mathrm{II}: \quad \tau(u) = x_0 \qquad \tau(u, x_0, y_0) = x_1$

Weil τ GS für II: $uy \in A \iff x \notin A.$

$\Updownarrow$

$y \in A_{(u)}$

Also ist dies eine GS für I in $G_L(A, A_{(u)})$.

q.e.d.

Korollar Falls α Limes und L_α selbstdual, so ist $cf(\alpha) = \omega$.

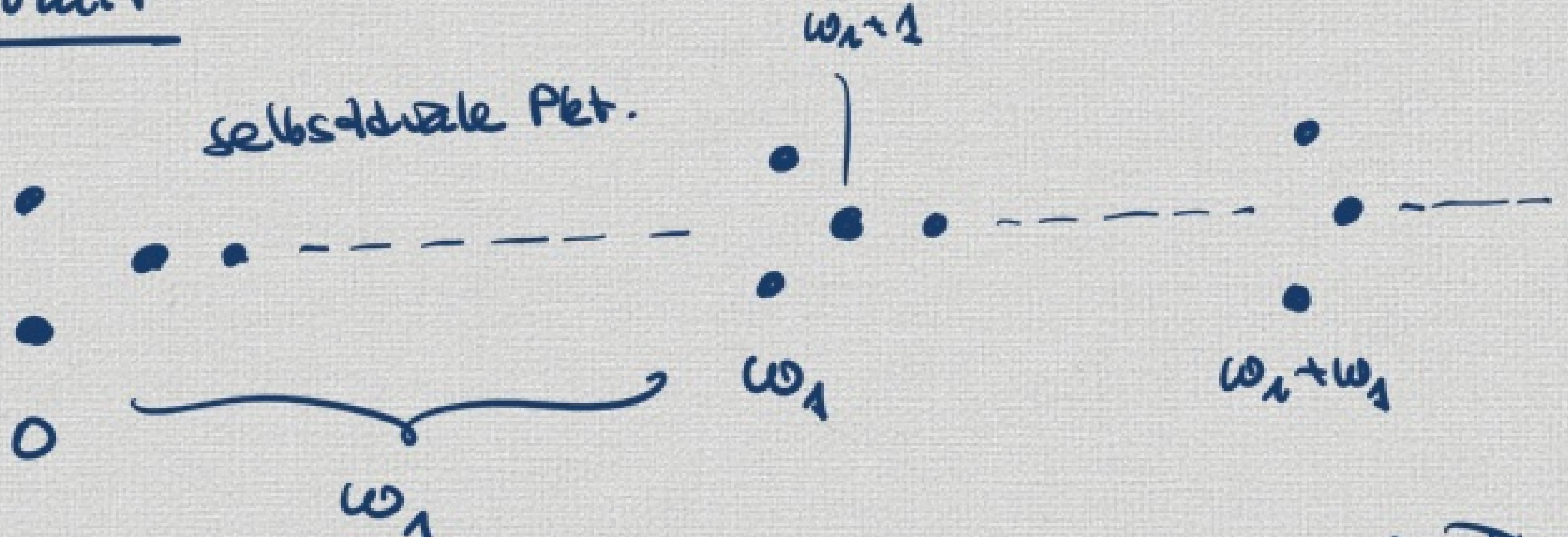
Beweis Sei $A \in L_\alpha$. Nach Satz gilt $A_{(n)} <_L A$, also sei α_n gegeben mit $A_{(n)} \in L_{\alpha_n}$ und $\alpha_n < \alpha$.

Aber dann $A = \bigoplus A_{(n)}$ und somit $\alpha = \sup\{\alpha_n ; n \in \mathbb{N}\}$

$$\Longrightarrow cf(\alpha) = \omega.$$

q.e.d.

Somit

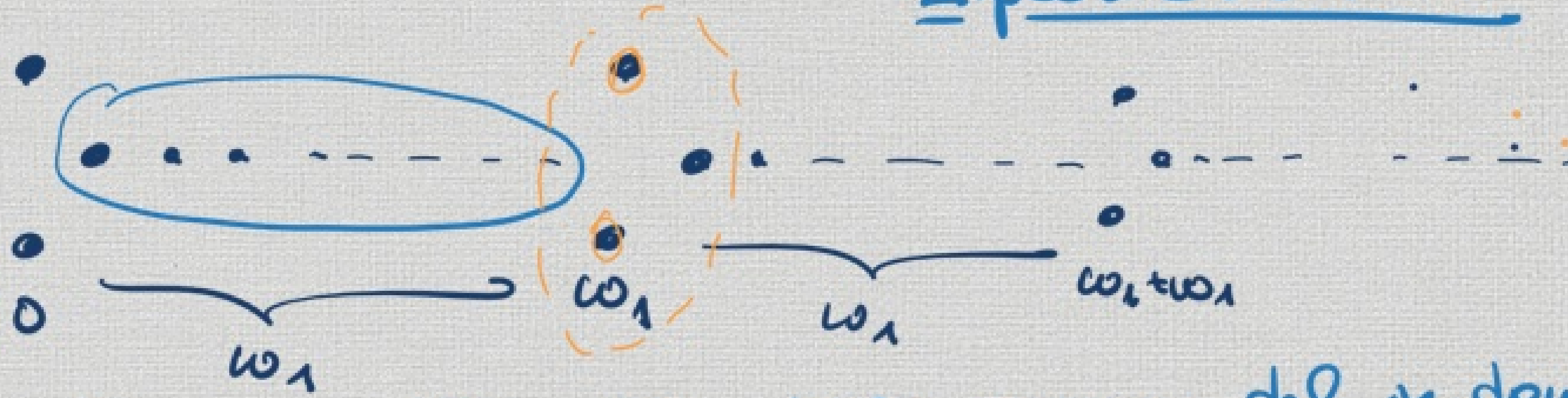


Es wechseln sich ω_1-Folgen von sd Pkt. und nsd Paare ab.

Bem. Die Borelklassen $\Sigma^0_\alpha / \Pi^0_\alpha$ bilden eine aufsteigende ω_1-Folge von nsd Paaren. Also hat die Hierarchie mindestens Höhe ω_1^2. [In Wirklichkeit viel höher.]

§ 19 Die nsd Paare in der Wadge-Hierarchie

Lipschitzhierarchie



Nachfolger

Man kann leicht zeigen, daß in den ω_1-Folgen von sd Lipschitzgraden alle Mengen Wadge-äquivalent sind.

$[A \equiv_W \neg A.]$

D.h. in der Wadgehierarchie sieht es so aus, als würden sich sd Punkte und nsd Paare abwechseln.

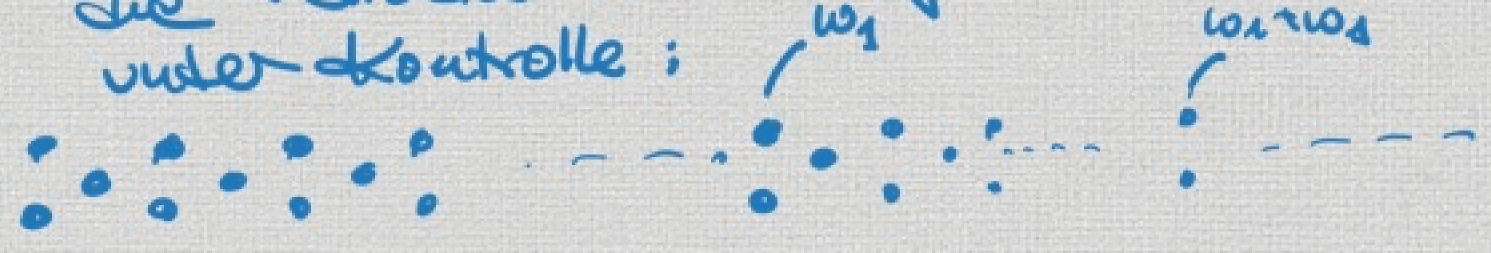
Ist das wirklich so? $\boxed{\text{Ja}}$

THEOREM (Steel-Van Wesep-Theorem)

$\forall A, B$ Borel $\quad A \leq_W X \setminus A \implies A \leq_L X \setminus A.$

Bemerkung

Mit dem SVW-Theorem haben wir die Struktur der Wadge-Hierarchie vollst. unter Kontrolle:



Das SVW-Theorem wird mit der Martin-Monk-Methode bewiesen.

Beweisskizze.

Für Widerspruch nehmen wir an

$$A \leq_W X \setminus A$$

$$A \not\leq_L X \setminus A$$

$G_L(A, X\setminus A)$ hat Spieler I eine GS σ_0

$G_W(A, X\setminus A)$ hat Spieler II eine GS σ_1.

1. Approximation des Beweises.

Grundidee der MM-Methode. Für $z \in 2^{\mathbb{N}}$ definiere $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$-Matrix A^z, so daß die ite Zeile a_i^z die Antwort der Strategie $\sigma_{z(i)}$ auf die $i+1$-te Zeile a_{i+1}^z ist.

Dann gilt $\forall n \geq N \; z(n) = z'(n)$, so $a_n^z = a_n^{z'}$ $(\forall n \geq N)$

und falls z ein Flipp von z', so gilt

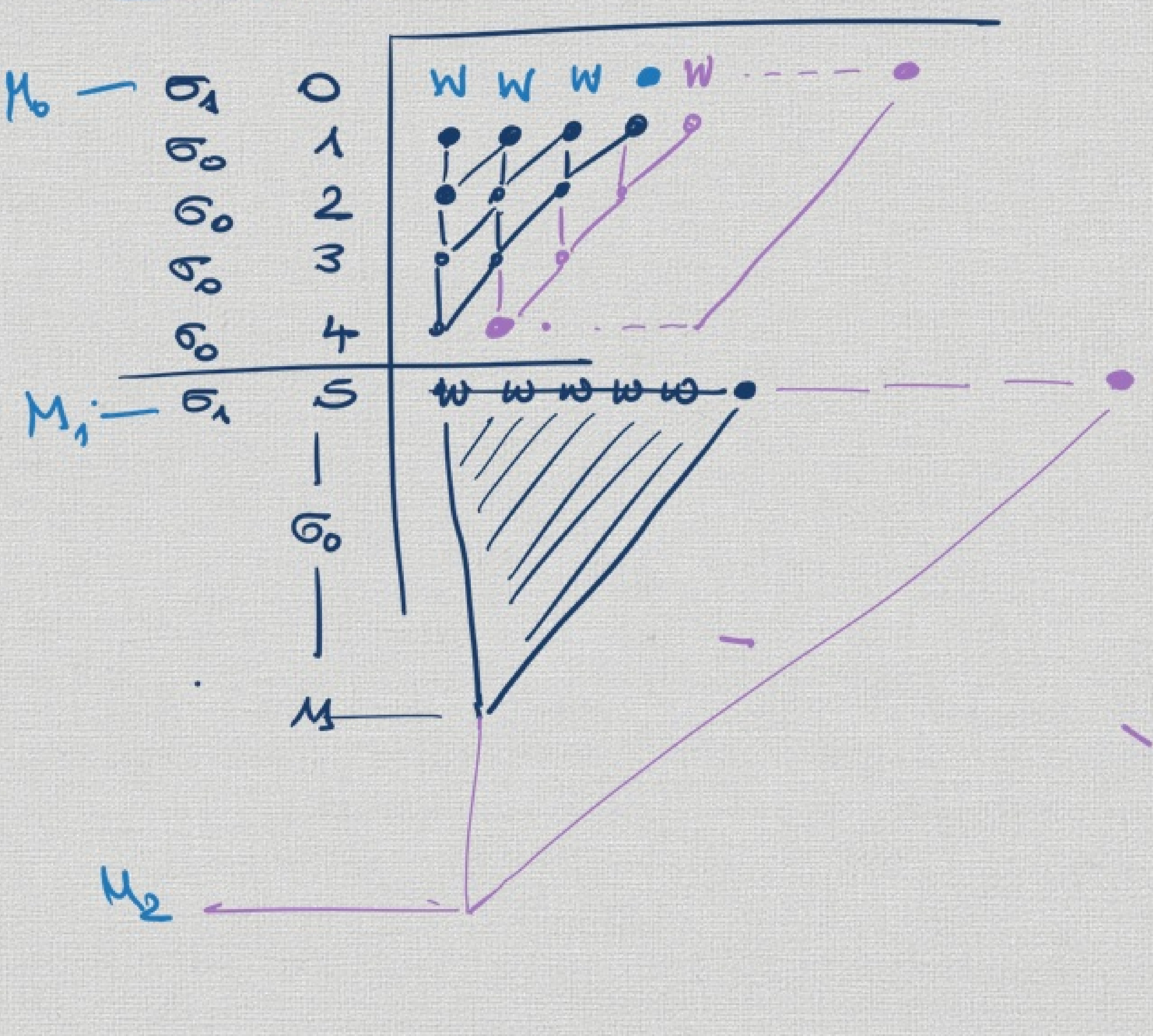
$$a_0^z \in A \iff a_0^{z'} \notin A$$

Also ist $F := \{z ; a_0^z \in A\}$ eine Flippmenge.

Problem Die Strategie σ_1 für Spieler II braucht Input, um Output zu produzieren. D.h. falls $z(n) = 1$, so ist a^z_{n0} nur definiert, wenn $a^z_{n+1,0}$ definiert ist.

Zudem σ_1 kann auch den Wert "warten" produzieren, wodurch die Rekursion nicht vorangetrieben wird.

2. Approximation



Also existieren

$$M_i \in \mathbb{N},$$

so daß falls σ_1 nur an den M_i steht und sonst σ_0, dann wird das Diagramm vollständig ausgefüllt.

<u>Neue Idee</u> Definiere für $z \in 2^{\mathbb{N}}$ Diagramme, die an

(a) allen Stellen $\neq M_i$ jeweils Strategie σ_0 haben

(b) an M_i Strategie $\sigma_{1+z(i)}$ haben, wobei σ_2 die Kopierstrategie.

Verwende diese Diagramme A^z, um eine Flippmenge zu erzeugen.

<u>"q.e.d."</u>