Determiniertheit

# Elfte Vorlesung

10. Juli 2025

# XI

Wadge-Hierarchie

$A \leq_w B :\iff$ Spieler II hat eine GS in $G_w(A, B)$

$X := \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$

$F := \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$

$\iff$ es ex. $f$ stetig mit $A = f^{-1}[B]$


$\leftarrow$ offene Basismengen

$s, t \neq \emptyset$

$[s] \equiv_w [t]$

Zsh. Borelhierarchie

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \Sigma^0_1 & & & & \Sigma^0_2 & & \\
\Delta^0_1 & \subseteq & & \subseteq & \Delta^0_2 & \subseteq & & \subseteq & \Delta^0_3 \quad \cdots \\
 & \subseteq & \Pi^0_1 & \subseteq & & \subseteq & \Pi^0_2 & \subseteq &
\end{array}$$

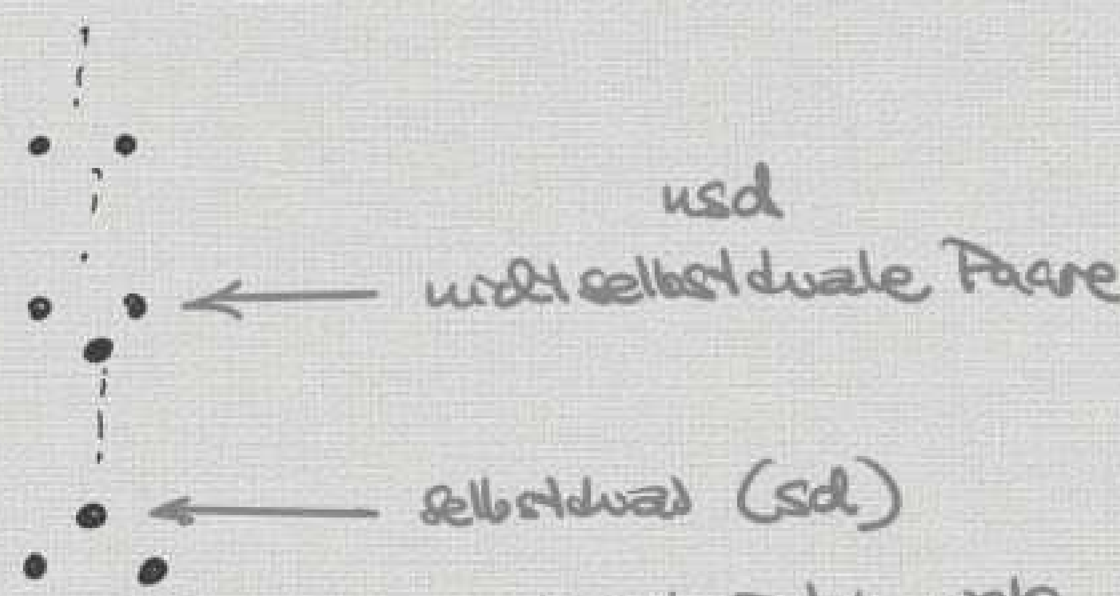
abgeschl. unter $\leq_w$

<u>Wadge-Lemma</u> $\forall A, B$ Borel

entweder $A \leq_w B$ oder $B \leq_w X \setminus A$.

Semilinearität

D.h. Wadge-Hierarchie




Typische Fragen: Gibt es unbeschränkt viele usd Paare? Unbeschränkt viele sd Punkte?
Wie hoch?
Absteigende Ketten?
Aufsteigende Ketten?

Partielle Antworten:
- Mindestens Höhe $\omega_1$ (wg. Borelhierarchie)
- Unbeschränkt viele usd Paare (wg. Borelhierarchie)
- Aufsteigende Ketten (incl. beschränkte)

$A \oplus B := \{ nx ;$ n ist gerade und $x \in A$ oder n ist ungerade & $x \in B \}$

Turingsupremum

$A, B \leq_W A \oplus B$
und falls $\underline{A, B \leq_W C}$, so $A \oplus B \leq_W C$.

Also in der Tat ein Supremum.

Wir können eine ähnliche Strukturfrage mit einer Variante des Turingsupremums lösen:

Ang. $\{A_n; n\in\mathbb{N}\}$ mit $A_n <_W A_{n+1}$. Gibt es dann immer ein Supremum und ist dieses selbstdual oder nsd?

ANTWORT: Ja + selbstdual.

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n := \{nx;\ x\in A_n\}$$

Ebenso wie vorher: $\forall n\ A_n \le_W \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Wollen: $\forall n\ A_n \le_W C$, dann

$$\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n \le_W C.$$

Sei $\tau_n$ eine GS für II in $G_W(A_n, C)$. In $G_W(\bigoplus A_n, C)$ warte auf den ersten Zug von I: $n$, spiele den Wartezug und folge danach $\tau_n$. Dies ist GS nach Konstruktion.

Warum ist $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ selbstdual?

Da $A_n <_W A_{n+1}$ ist auch $X\setminus A_n <_W A_{n+1}$
[Folgt direkt aus Wadge-Lemma und $<_W$.]

Wir wissen zwar nicht, ob $A_n$ selbstdual ist, aber wir wissen, daß, falls $A_n$ usd, so bilde $A_n \oplus X \setminus A_n \leq_W A_{n+1}$.

Wir finden also eine Folge $A_n'$ mit

$\forall n \, \exists m \quad A_n \leq A_m'$ so daß alle $A_n'$

$\forall m \, \exists n \quad A_m' \leq A_n$ selbstdual sind

Daher können wir oBdA annehmen, daß die $A_n$ selbstdual sind:

GS $\tau_n$ in $G_W(A_n, X \setminus A_n)$ für Spieler II.

Es gilt $X \setminus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} X \setminus A_n$

und somit ist die Strategie

Falls Spieler I $n$ spielt, folge nach einem Zug weiter der Str. $\tau_n$

eine GS für II im Spiel

$$G_W\left(\bigoplus A_n, X \setminus \bigoplus A_n\right).$$

Also ist $\bigoplus A_n$ selbstdual.

# §15 Hierarchieverfeinerungen

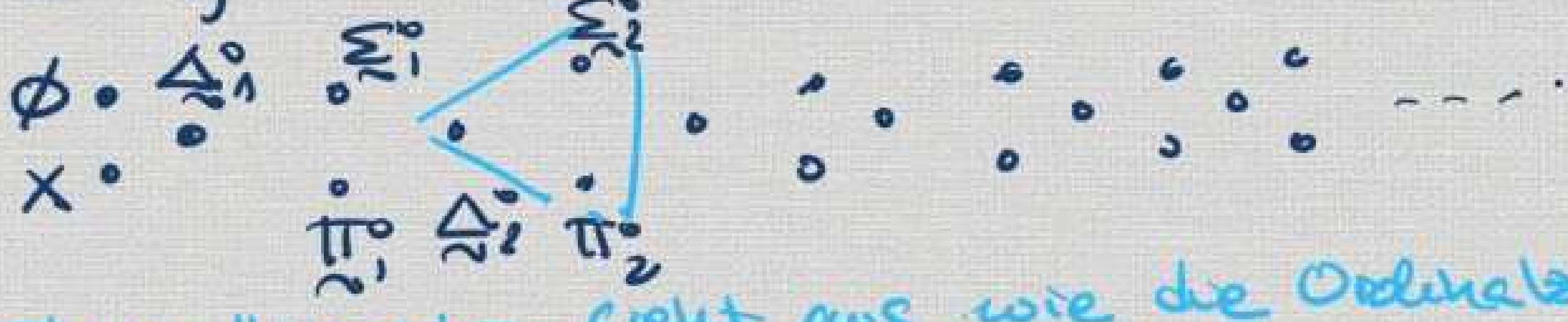
Wir schreiben die Borelhierarchie als Präordnung wie folgt:

$$\emptyset \le_B A \quad \text{falls } A \neq X$$
$$X \le_B A \quad \text{falls } A \neq \emptyset$$

Falls $A, A' \neq X, \emptyset$, so ist

$$A \le_B A' \;:\Longleftrightarrow\; \forall \alpha \quad 0 < \alpha < \omega_1$$
$$A \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha$$
$$\Longrightarrow A' \in \mathbf{\Delta}^0_\alpha, \mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha$$

Dies liefert die Borelhierarchie:




Diese Hierarchie sieht aus wie die Ordinalzahl $\omega_1$ mit solchen Dreiecken

Insbesondere gibt es keine absteigenden Ketten.

**Def.** $\le_P$ ist eine Verfeinerung von $\le_Q$ falls $\forall A, B \quad A \le_P B \Longrightarrow A \le_Q B$.

Da alle Borelklassen unter $\leq_W$ abgeschlossen sind, gilt

$$A \leq_W A' \implies A \leq_B A'$$

und somit ist die Wadge-Hierarchie eine Verfeinerung der Borel-Hierarchie.

<u>Def.</u> Eine Hierarchie ist <u>fundiert</u>, wenn sie keine absteigenden Ketten hat.

<u>Bem.</u> Ist $\leq_P$ eine Verfeinerung von $\leq_Q$ und $\leq_P$ fundiert, so $\leq_Q$ fundiert.

<u>Beweisidee</u>

Finde geeignete Verfeinerung von $\leq_W$ die fundiert ist

$$\implies \leq_W \text{ ist fundiert.}$$

## § 16 Die Lipschitz-Hierarchie.

Seien $A, B \subseteq X$. Definiere das **Lipschitzspiel** $G_L(A,B)$ wie folgt:

$$\begin{array}{lllllll} \mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & \ldots \\ \mathrm{II} & & y_0 & & y_1 & & y_2 \; \ldots \end{array}$$

ebenso wie das Wadgespiel, außer daß Spieler $\underline{\mathrm{II}}$ nie den Wartezug spielen darf.

Schreibe $A \leq_L B \;:\Longleftrightarrow$ Spieler $\underline{\mathrm{II}}$ hat GS in $G_L(A,B)$

<u>Offensichtlich</u> $A \leq_L B \Longrightarrow A \leq_W B$.

Somit ist die Lipschitzhierarchie eine Verfeinerung der Wadgehierarchie.

<u>Bem.</u> Die Strategien für Sp. $\underline{\mathrm{II}}$ in $G_L(A,B)$ entsprechen den <u>längenerhaltenden Approximationen</u>; diese entsprechen genau den Lipschitzfunktionen mit Konstante 1.

Ist $\leq_L$ eine echte Verfeinerung von $\leq_W$?

Wir erinnern uns

$$[s] \equiv_W [t] \text{ für alle } s,t \neq \emptyset.$$

Es gilt $[0] \leq_L [00]$, aber

$$[00] \not\leq_L [0]:$$

GS für I in $G_L([00],[0])$ ist

spiele 0 und antworte auf 0 mit 1
auf $b \neq 0$ mit 0

Genauso: falls $\mathrm{lh}(s) < \mathrm{lh}(t)$, so gilt

$$[s] <_L [t].$$

Aber sie sind Wadge-äquivalent.

<u>Funktionieren</u> <u>Turing suprema</u> für <u>Lipschitzgrade?</u>

Sicherlich $A \leq_L A \oplus B$

$$A_n \leq_L \bigoplus A_n.$$

Aber die Supremumsargumente verwendeten einen Wortezug und funktionieren daher nicht unmittelbar für Lipschitz.

Es funktioniert trotzdem, aber das Argument ist etwas komplizierter:

**Bsp** Sei $A$ Lipschitz-und

**Beh.** Dann ist $A \oplus X \setminus A$ das Supremum von $A, X \setminus A$. (*)

**z.z.** Falls $A, X\setminus A \leq_L C$, so $A \oplus X\setminus A \leq_L C$.

[Wie gesagt: der Wadge-Beweis funktioniert nicht!]

Aus (*) folgt: $A, X\setminus A <_L C$.

Also, in $G_L(C, A)$ / $G_L(C, X\setminus A)$ hat II keine GS.

Wegen Det. hat also I eine GS, sagen wir $\sigma$ in $G_L(C, A)$ und $\sigma'$ in $G_L(C, X\setminus A)$.

Dann definiere eine Strategie $\sigma^*$ für II in $G_L(A \oplus X\setminus A, C)$:

Spieler I spielt $n$;
falls $n$ gerade, so folge ich $\sigma'$,
falls $n$ ungerade, so folge ich $\sigma$.

Dies ist eine GS.

Genauso: $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist das $\leq_L$-Supremum einer aufsteigenden Kette von Lipschitzgraden.

Insbesondere: $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} [0^n]$ ist strikt $<_L$-oberhalb der offenen Basismengen.

# §17 Das Martin-Monk-Theorem

**Theorem** Die (Borel-) Lipschitzhierarchie ist fundiert. (Martin-Monk) ← Leonard Monk

**Beweis** Angenommen $\{A_n; n \in \mathbb{N}\}$ ist $<_L$-absteigende Kette:

$$\forall n \quad A_{n+1} <_L A_n.$$

Wie zuvor gilt auch $A_{n+1} <_L X \setminus A_n$.

Insbesondere gibt es GS für Sp. I in

$G_L(A_n, A_{n+1}) \quad \sigma_n^0$

$G_L(X \setminus A_n, A_{n+1}) \quad \sigma_n^1$

Wir werden für jedes $z : \mathbb{N} \longrightarrow 2$ eine $\omega \times \omega$-Matrix $A^z$ konstruieren, die wir das Martin-Monk-Diagramm nennen.

Jeweils aufeinanderfolgende Zeilen der Matrix entsprechen einem Spiel, bei dem Spieler I einer dieser Strategien folgt.

z.B. Zeile 0 ist die Antwort von Spieler I nach Strategie $\sigma_0^{z(0)}$ auf den Inhalt von Zeile 1.

Zeile 1 ist die Antwort von Sp. II nach Strategie $\sigma_1^{z(1)}$ auf den Inhalt von Zeile 2.

$$
\begin{array}{c|llll}
0 \;\; \sigma_0^{z(0)} & \sigma_0^{z(0)}(\emptyset) = a^z_{00} & \sigma_0^{z(0)}(a_{00}a_{10}) = a^z_{01} & a^z_{02} & a_0 \\
1 \;\; \sigma_1^{z(1)} & \sigma_1^{z(1)}(\emptyset) = a^z_{10} & a^z_{11} & a^z_{12} & a_1 \\
2 \;\; \sigma_2^{z(2)} & \sigma_2^{z(2)}(\emptyset) = a^z_{20} & a^z_{21} & a^z_{22} & \\
3 \;\; \sigma_3^{z(3)} & a^z_{30} & a^z_{31} & a^z_{32} & \\
4 \;\; \sigma_4^{z(4)} & a_{40} & & \ddots &
\end{array}
$$

Da alle Strategien für Sp. I sind, ist die erste Spalte sofort bestimmt und wir können rekursiv die gesamte Matrix ausfüllen.

$$A^z := (a^z_{ij} ; i,j \in \mathbb{N}).$$

Wir setzen $a^z_i$ : die $i$-te Zeile dieser Matrix.

---

Es gilt:

falls $z(i) = 0$, so ist

$$a^z_i \in A_i \iff a^z_{i+1} \notin A_{i+1}$$

falls $z(i) = 1$, so ist

$$a^z_i \in A_i \iff a^z_{i+1} \in A_{i+1}.$$

Stimmen $z$ & $z'$ ab $N$ überein, so sind alle Zeilen von $A^z$ und $A^{z'}$ hinter $N$ identisch.

Wir wollen in der letzten VL zeigen, daß uns dies erlaubt, eine Flippmenge zu definieren.