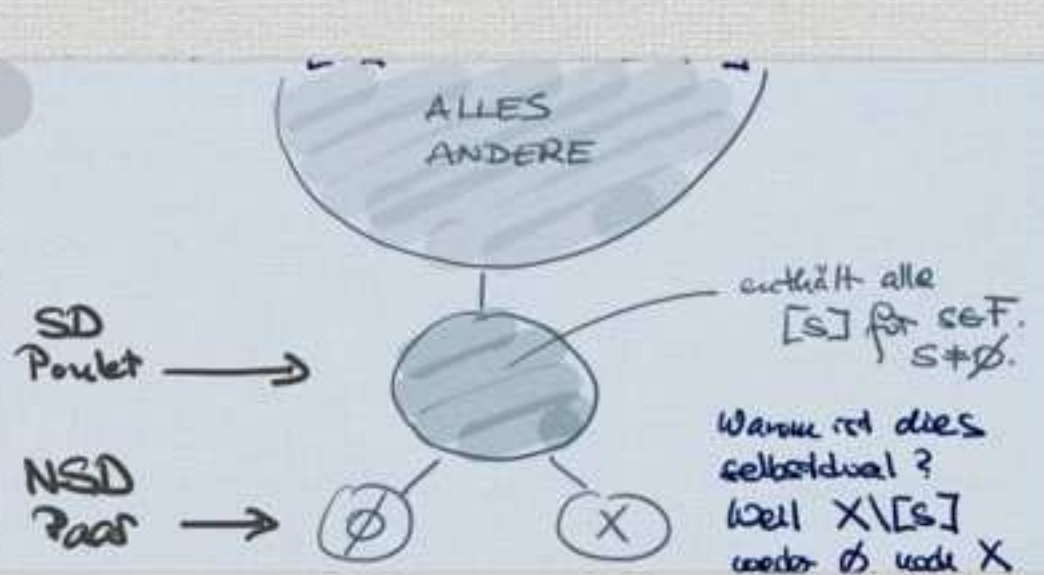


Zehnte Vorlesung



Determiniertheit

3. Juli 2025



$$X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$
$$(P(X) / \equiv_w, \leq_w)$$

← Vorlesung IX

THEOREM (Wadge-Lemma)

Falls $G_w(A, B)$ determiniert ist, so gilt entweder $A \leq_w B$ oder $B \leq_w X \setminus A$.

SEMILINEARITÄT

④ [Anwendung]

Falls B eine Borelsteinnmenge ist und P die Menge aus Anwendung ③, so ist $G_w(P, B)$ nicht determiniert.

$$P \not\leq_w B$$

$$P \not\leq_w X \setminus B$$

Konsequenzen

- ① Aufhebeln der Borelmengen kann (muss) es nicht determinierte Wadgerpiele geben.
- ② Ausdruck auf die Borelmengen übertragen mit:

Falls $A, B \leq_w$ - unvergleichbar sind,
so ist $B \equiv_w X \setminus A$.

$$\left[\begin{array}{l} A \not\leq_w B \xrightarrow{WL} B \leq_w X \setminus A \\ B \not\leq_w A \xrightarrow{WL} A \leq_w X \setminus B \end{array} \xRightarrow{\text{Bem.}} X \setminus A \leq B \right]$$

$B \equiv_w X \setminus A$

SEMILINEARE ORDNUNG

Alles ist vergleichbar außer nach Paare.

D.h. die Struktur sieht ungefähr so aus

gibt es überdeckt
nele Paare oder
ist fröde;
absteigende Ketten,
aufsteigende Ketten v.a.



Eine semilineare Ordnung ist
eine partielle Ordnung
 $(P, \leq)$ mit $P \subseteq \mathcal{P}(X)$,
so daß mit der Äquivalenz-
relation

$$A \sim B : \Leftrightarrow A = X \setminus B$$

gilt:

$(P/\sim, \leq)$ ist eine
lineare Ordnung.

Nochmal: Über Hierarchie wollen wir reden?

Da $G_w(A, B)$ nicht für alle A, B determiniert ist,
gilt Semilinearität nicht auf ganz

$$\mathcal{P}(X)/\equiv_w.$$

[Dies gilt z.B. für P und B wie auf der letzten
Seite: $P \not\leq_w B$, $P \not\leq_w X \setminus B$, aber P ist
Borel, B ist nicht Borel, also $B \not\leq_w P$
und $X \setminus B \not\leq_w P$, also ist (P, B) eine nicht
semi-vergleichbare Paar.]

Betrachten wir hingegen

$$\mathcal{L} = \{A \subseteq X; A \text{ ist Borel}\}$$

Dann gilt $\forall A, B \in \mathcal{L}$ ist $G_W(A, B)$ ein Borel-Spiel, also determiniert und somit ist

$$(\mathcal{L} / \equiv_W, \leq_W)$$

eine semi-lineare Ordnung.

Die Frage aus VL IX ist also: was ist die lineare Ordnung, die dieser semi-linearen Ordnung zugrundeliegt, und wo liegen die unendlichen Paare.

Bsp. für lineare Ordnungen:

$\mathbb{N}$ ← keine absteigenden Ketten
+ abz.

$\mathbb{Z}$

$\mathbb{Q}$

$\mathbb{R}$

$\omega \cdot 2$

$\omega \cdot 3$

ω^2

ω_1

ω_2

← dicht

← überabzählbar

← eine beschränkte aufsteigende Kette + abz.

← überabzählbar

§13 Die Borelhierarchie

$\mathcal{L} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die kleinste Menge, die alle offenen Mengen enthält und unter Komplement + abz. Vereinigungen abgeschlossen ist.

Def. der Borelhierarchie:

$$\Sigma_1^0 := \{A \subseteq X; A \text{ offen}\}$$

Sei Σ_α^0 def.; dann $\Pi_\alpha^0 := \{X \setminus A; A \in \Sigma_\alpha^0\}$

Seien Π_β^0 für $\beta < \alpha$ def.;

dann definiere $\mathcal{U} := \bigcup_{\beta < \alpha} \Pi_\beta^0$ und

$$\Sigma_\alpha^0 := \left\{ \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n; \text{ für alle } n, A_n \in \mathcal{U} \right\}$$

Offensichtlich: $\forall \alpha \quad \Sigma_\alpha^0, \Pi_\alpha^0 \subseteq \mathcal{L}$.

Außerdem def. $\Delta_\alpha^0 := \Pi_\alpha^0 \cap \Sigma_\alpha^0$

Abschließeneigenschaften

Δ_α^0 : abgeschlossen unter Komplement
abgeschl. unter endl. Schnitten & Verein.
abgeschl. unter $\leq \omega$

Σ_α^0 : abgeschlossen unter abz. Vereinigungen
abgeschlossen unter endl. Schnitten & Verein.
abgeschl. unter $\leq \omega$

Π_α^0 : abgeschl. unter endl. Schnitten & Verein.
abgeschl. unter $\leq \omega$.

Wir können die folgenden Relationen überprüfen:

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha}^0 &\subseteq \sum_{\alpha}^0 \subseteq \sum_{\alpha+1}^0 \\ \Delta_{\alpha}^0 &\subseteq \Pi_{\alpha}^0 \subseteq \Delta_{\alpha+1}^0 \subseteq \Pi_{\alpha+1}^0 \end{aligned}$$

Dies sieht fernlinear aus!

selbstdual

und Paar

Da es eine endliche Klasse von Ordinalzahlen gibt, muß eine Ordinalzahl λ existieren, mit $\Delta_{\lambda}^0 = \sum_{\lambda}^0 = \Pi_{\lambda}^0$.

Wir wissen, daß $\lambda < |\mathcal{L}|^+$. Was ist das?

$$|\sum_{\alpha}^0| = 2^{N_0}; \quad |\sum_{\alpha}^0| \leq |\mathcal{U}|^{N_0}; \quad |\Pi_{\alpha}^0| = |\sum_{\alpha}^0|$$

Also gilt: $\forall \alpha < \omega_1 \quad |\sum_{\alpha}^0| = 2^{N_0}$
und somit $|\sum_{\omega_1}^0| = \aleph_1 \cdot 2^{N_0} = 2^{N_0}$.

Theorem 1 (ZFC) $\sum_{\omega_1}^0 = \Delta_{\omega_1}^0 = \Pi_{\omega_1}^0$.

Beweis Wir werden zeigen, daß $\sum_{\omega_1}^0$ unter

Komplementen + abz. Verein. abgeschlossen ist.

Sei $A_n \in \sum_{\omega_1}^0$, dann ist jedes A_n eine

abzählbare Vereinigung von Mengen in $\Pi_{\alpha_{n,m}}^0$

mit $\alpha_{n,m} < \omega_1$.

$$A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m}$$

Wegen der Regularität von ω_1 (AC!)
gibt es $\alpha_n < \omega_1$ mit

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{n,m} < \alpha_n.$$

Also ist $A_n = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_{n,m} \in \sum_{\alpha_n}^0 \subseteq \prod_{\alpha_{n+1}}^0$

Betrachte also $\alpha = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \alpha_{n+1} < \omega_1$

wiederrum wg. Regularität von ω_1 .

Also ist $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \sum_{\alpha}^0 \subseteq \sum_{\omega_1}^0$.

Ebenso für das Komplement:

Falls $A \in \sum_{\omega_1}^0$, dann ist $A \in \sum_{\alpha}^0$ für ein $\alpha < \omega_1$ nach dem Argument von oben.

Also ist $X \setminus A \in \prod_{\alpha}^0 \subseteq \sum_{\omega_1}^0$ q.e.d.

Bem. Also gilt

$$\mathcal{L} = \sum_{\omega_1}^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \sum_{\alpha}^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \prod_{\alpha}^0$$

Also gibt es $2^{\aleph_0}$ viele Borelmengen.

Theorem 2 (ZFC) Für alle $\alpha < \omega_1$ gilt

OHNE BEWEIS

$$\Delta_\alpha^0 \subsetneq \sum_\alpha^0$$

$$\Delta_\alpha^0 \subsetneq \prod_\alpha^0.$$

Borel hierarchie lemma

Das heißt: die Borel hierarchie ist eine
semitransitive Ordnung, deren zugrundeliegende
lineare Ordnung ω_1 ist.

Und: selbstduale + used Punkte
wechseln sich ab.

Korollar Es gibt keine $\leq_w$ -maximale
Borelmengen.

Beweis Ang. A sei maximal. Finde used
Bem. $\alpha < \omega_1$ mit $A \in \sum_\alpha^0$.

Nach Thm ex. $B \in \sum_{\alpha+1}^0 \setminus \Delta_{\alpha+1}^0$

Also gilt: $B \not\leq_w A$ [wg. $\leq_w$ -Abgerd.]
 $X \setminus B \not\leq_w A$

Nach Wadge-Lemma gilt $A \leq_w X \setminus B$
 $A \leq_w B$,

also $A \leq_w B$ und $A \leq_w X \setminus B$.

q.e.d.

§ 14 Grundlegende Eigenschaften der Borel-Wadgehierarchie

$$(\mathcal{L}_\omega \equiv_w, \leq_w)$$

ist semilineare Ordnung.

Fragen Was ist die zugrundeliegende
lineare Ordnung?
Wo liegen die usd Paare?

Konkreter

Gibt es:

1. absteigende Ketten
2. (beschränkte) aufst. Ketten
3. aufeinanderfolgende usd Punkte
4. usd Paare
5. unbeschränkt viele usd Punkte
6. usd Paare

Unmittelbare Antwort auf 2. und 6.:

Falls $A \in \mathcal{L}_\omega$, so ex. α mit $A \in \Sigma_\alpha^0$.

Dann wähle $B \in \Sigma_{\alpha+1}^0 \setminus \Delta_{\alpha+1}^0$.

$$\Rightarrow B \not\equiv_w X \setminus B.$$

Also ist $(B, X \setminus B)$ usd Paar und

$$A <_w B \text{ und } A <_w X \setminus B$$

Also ist die Antwort auf 2. & 6. JA

Betrachte $A, B \subseteq X$.

Definiere $A \oplus B := \{nx; n \text{ gerade und } x \in A\}$
 $\cup \{my; m \text{ ungerade und } y \in B\}$

Dies nennen wir das Tungsupremum.

Satz $A \leq_w A \oplus B$ und $\forall C$ falls
 $B \leq_w A \oplus B$
 $A \leq_w C$ & $B \leq_w C$, so $A \oplus B \leq_w C$.

Beweis $A \leq_w A \oplus B$:

Strategie: Spiele 0 und kopiere die Züge
von Spieler I mit einem Zug

Verzögerung
ist eine GS für Spieler II.

Genau so $B \leq_w A \oplus B$.

Spiele 1 und kopiere die Züge von
Spieler I.

Sei nun C , so daß II eine GS in
 $G_w(A, C)$ und $G_w(B, C)$ hat.

Dann ist die Strategie "falls der erste Zug von I
gerade ist, so folge τ_A um einen Zug verzögert;
falls der erste Zug ungerade ist, so folge τ_B
um einen Zug verzögert" ist eine GS für II
in $G_w(A \oplus B, C)$. q.e.d.

Ist nun $(A, X \setminus A)$ ein usd Paar, so gilt

$$A \oplus X \setminus A = X \setminus (X \setminus A \oplus A)$$

Satz Falls $(A, X \setminus A)$ usd Paar ist, so ist

$A \oplus X \setminus A$ selbstdual und

$$A <_w A \oplus X \setminus A.$$

Beweis Da A usd & $A \oplus X \setminus A$ sd, gilt

$$A <_w A \oplus X \setminus A.$$

Zeigen wir nun, daß $A \oplus X \setminus A$ sd.

$G_w(A \oplus X \setminus A, X \setminus (A \oplus X \setminus A))$
 $= G_w(A \oplus X \setminus A, X \setminus A \oplus A)$ hat eine
GS für Spieler II:

Falls Spieler I gerade spielt, antwarte
ungerade; falls Spieler I ungerade spielt,
antwarte gerade.

Damach: kopiere die Züge von Sp. I.
q.e.d.

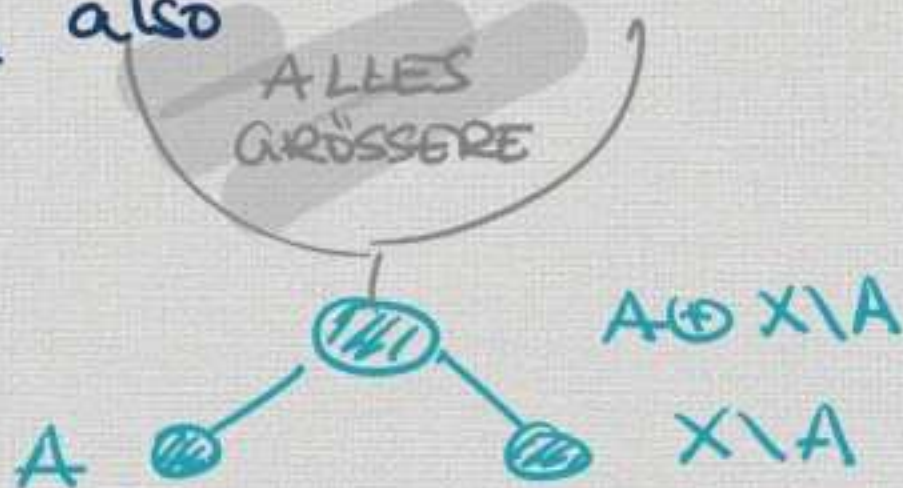
Zsf. D.h. sowohl sd Punkte als auch usd
Paare sind unterdrückt in $(\mathcal{L} / \equiv_w, \leq_w)$.

Verbleibende Fragen

1. Gibt es absteigende Ketten?
2. Gibt es aufsteigend folgende sd Punkte?
und Paare?
3. Gibt es

Die Antwort auf 3. folgt unmittelbar aus den letzten beiden Sätzen!

Ist $(A, X \setminus A)$ ein sd Paar, so gilt
 $A \oplus X \setminus A$ ist das Supremum von A &
 $X \setminus A$, also



Also kann  nicht auftreten!

Verbleiben 1. & 2.

Hierfür führen wir ein neues Spiel ein:

das Lipschitz-Spiel

und verwenden eine Technik:

MARTIN-MONK-Methode.