

VIII

ACHTE VORLESUNG

Detektivierbarkeit

19. Juni 2025

§ 10 Reduktoren und Komplexität

X Menge eine Eigenschaft von TM von X
 $P \subseteq P(X)$

Wir nennen eine Fkt. f strukturell falls
 Orbital von Mengen in P werden in P endl.

$$\forall A \subseteq X \quad A \in P \longrightarrow f^{-1}[A] \in P$$

→ Falls $\emptyset, X \in P$, so sind konstante Funktionen
 strukturerhaltend:

$$f: X \longrightarrow X \quad \text{mit} \quad f(x) = c \quad \forall x.$$

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} X & \text{falls } c \in A \\ \emptyset & \text{falls } c \notin A \end{cases}$$

Wichtig Dieses Bsp. zeigt, daß "strukturell" nicht "informativ" heißt.

Lebktiv. Falls A, f gegeben sind, so kann
 $f^{-1}[A]$ konstruiert werden: $f^{-1}[A]$ hat
 also höchstens die Komplexität von A .

Sei $\mathcal{F}_P$ die Menge der strukturerhaltenden
 Fkt.,

$$\text{Def. } A \leq_P B \iff \exists f \in \mathcal{F}_P \quad A = f^{-1}[B]$$

$$\iff \exists f \in \mathcal{F}_P \quad \forall x \in A \iff f(x) \in B.$$

aus Vorlesung

VIII

Beispiele

$X = 2^{\mathbb{N}}$

- I. $\mathcal{F}_P$: offene Mengen
 $\mathcal{F}_P$: stetige Funktionen
 $A \leq_P B$: A ist ein stetiges Urbild von B

$X = 2^{\mathbb{N}}$

- II. $\mathcal{F}_P$: Borel-Mengen
 $\mathcal{F}_P$: Borel-messbare Funktionen
 $A \leq_P B$: A ist ein Borel-messbares Urbild von B

$X = \mathbb{N}$

- III. $\mathcal{F}_P$: berechenbare Mengen
 $\mathcal{F}_P$: berechenbare Funktionen
 $A \leq_P B$: many-one reduction
- IV. $\mathcal{F}_P$: durch einen Polynomialen Algorithmus berechenbare Mengen
 $\mathcal{F}_P$: Polynomial berechenbare Fkt.

Bem. In §8.2.9 ist diesmal verwendet worden, daß die Beweismengen unter stetigen Urbildern abgeschlossen sind.

Lemma 1

$$\begin{aligned} A \leq_P \emptyset &\implies A = \emptyset \\ A \leq_P X &\implies A = X \end{aligned}$$

Beweis

$$\text{Erstbeweis } A \leq_P B \iff \exists f \in \mathcal{F}_P \quad A = f^{-1}[B].$$

Keine weitere Menge kann von $\emptyset$ kommen $f^{-1}[\emptyset]$ sein für beliebige f .
Also: keine $A \not\leq_P X$ kann von $\emptyset$ kommen $f^{-1}[X]$ sein.

q.e.d.

Das bedeutet, daß $\{\emptyset\}, \{X\} \equiv_P$ -Äquivalenzklassen sind.

Lemma 2

Falls $\mathcal{F}_P$ die konstruierten Funktionen enthält, so gilt:

$$A \neq X \implies \emptyset \leq_P A$$

$$\text{Falls } A \neq \emptyset \implies X \leq_P A$$

$$\text{Falls } A \neq X, \text{ so ex. } x \in X \setminus A.$$

Beweis

$$\text{Sei } f(y) := x \text{ für alle } y.$$

$$\text{Dann ist } f^{-1}[A] = \emptyset.$$

$$\text{Falls } \emptyset \neq A, \text{ so ex. } x \in A \text{ und}$$

$$f(y) := x \text{ für alle } y.$$

$$\text{Dann ist } f^{-1}[A] = X.$$

q.e.d.

Das impliziert folgendes Bild:



Eine Teilmenge $U \subseteq P(X)$ heißt nach unten abgeschlossen falls $\forall A, B \subseteq X, B \in U$ und $A \leq_P B$, so $A \in U$.

Eine Teilmenge $K \subseteq P(X)$ heißt Kegel falls ein $B \subseteq X$ existiert mit

$$K = \{A \mid A \leq_P B\}$$

Bem. Kegel sind nach unten abgeschlossen [folgt aus Transitivität].

Wir schreiben K_B für diesen Kegel.

Lemma 3

Angenommen, $|\mathbb{F}_p| < |p(X)|$.
Dann gilt: für alle B ist
 $K_B \neq p(X)$.

Beweis

Die Fkt.

$$G: \mathbb{F}_p \rightarrow p(X)$$

$$\xrightarrow{f} f^{-1}[B]$$

ist eine Surjektion von $\mathbb{F}_p$ auf K_B .
Also $|K_B| \leq |\mathbb{F}_p| < |p(X)|$.

q.e.d.

Stufenaufgabe

Was können wir in konkreten Fälle
(vorgegebenes p) über das Verhalten
von

$$(p(X)/\equiv_{p_1} \leq p)$$

sagen?

z.B. gibt es unregelmäßige Elemente
ausser $\emptyset$ & X ?

gibt es aufsteigende / absteigende
Potenzen?
etc.

§1.1 Stetige Funktionen in Cauchy- und Banraum.

$$X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}} / 2^{\mathbb{N}} \quad \mathcal{P} = \text{offene Mengen}$$

$$\mathcal{F}_{\mathcal{P}} = \text{stetige Fkt.}$$

$$F = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} / 2^{<\mathbb{N}}$$

Def. Eine Funktion $\varphi: F \rightarrow F$ heißt

Approximation falls

- (i) $s \leq t \implies \varphi(s) \leq \varphi(t)$
- (ii) für alle $x \in X$
- $$\lim(\varphi(x \upharpoonright n)) \longrightarrow \infty$$

1st φ eine Approximation, so definieren

$$\hat{\varphi}(x) := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \varphi(x \upharpoonright n)$$

Nach (ii) gilt $\hat{\varphi}(x) \in X$, auch

$$\hat{\varphi}: X \longrightarrow X$$

Wir sagen $\hat{\varphi}$ und von φ approximiert.

Sei nun $f: X \rightarrow X$ und sei F .

Wir sagen f, s

bestimmen die ersten n Werte
als t

Falls $x, y \geq s \Rightarrow f(x) \upharpoonright_n = f(y) \upharpoonright_n$
 $= t$

$\Delta(f, s) := \max \{k \leq \Delta(s) : f, s \text{ bestimmen die ersten } k \text{ Werte}\}$

Definiere $\varphi_f(s) := t$ falls f, s die ersten $\Delta(f, s)$ Werte
als t bestimmen

Bsp. / Bew. Falls f konstant ist, so bestimmen
jedes f, s die ersten n Werte für jedes
 $n \Rightarrow \Delta(f, s) = \Delta(s)$.

Also ist φ_f eine Approximation.

Für jedes f hat φ_f Eigenschaft (i) von
Approximationen, also nicht unbedingt

Eigenschaft (ii).

UA

Finden Sie konkrete Fkt. f , so daß

φ_f keine Approximation ist; so daß,

$\Delta(f, s) = 0$ für alle s .

Theorem 1 f ist stetig $\iff \exists \varphi$ Approximation

mit $f = \hat{\varphi}$.

Beweis

Wie hängt φ mit φ_f zusammen?

Nach Definition gilt: falls $f = \hat{\varphi}$, so ist φ_f Approximation und $\hat{\varphi}_f = \hat{\varphi} = f$.

" $\implies$ " ϵ - δ -Definition der Stetigkeit

$\forall \epsilon \exists \delta \quad d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \epsilon$
 In $X = \mathbb{R}^m / \mathbb{R}^n$ kann ich dies verfeinern.

zu:

$\forall n \exists \epsilon \quad x \upharpoonright \epsilon = y \upharpoonright \epsilon \implies f(x) \upharpoonright n = f(y) \upharpoonright n$.

Wir zeigen: f stetig $\implies \varphi_f$ Approximation
 [also $\varphi_f = f$]

Wir wissen nur Eigenschaft (i) zeigen:

$\forall x \quad d(\varphi_f(x) \upharpoonright \epsilon) \longrightarrow \infty$

$\Delta(f, x \upharpoonright \epsilon)$

Müssen zeigen: $\forall n \exists \epsilon \quad \Delta(f, x \upharpoonright \epsilon) \geq n$.

Das ist exakt (*)

Bem In manchen Büchern wird Eig. (i) auch als "Stetigkeit" bezeichnet.

" $\Leftarrow$ ". Sei φ eine Approximation, so dass

2.2. $\hat{\varphi} = f$. f ist stetig, also Urbilder von $[t] := \{y \in X; t \leq y\}$

sind offen.

Falls s die Eig. hat, dass f 's die ersten $a(t)$ Werte als t bestimmt, so gilt $[s] = \{x; s \leq x\} \subseteq f^{-1}([t])$.

$$\text{D.h. } \bigcup [s] \subseteq f^{-1}([t])$$

f 's bestimmt die ersten Werte als t

offers
Hence

Breitet zu zeigen, dass $f^{-1}([t]) \subseteq \bigcup [s]$

Da $f = \hat{\varphi}$ und φ war eine Approximation, gilt: falls $x \in f^{-1}([t])$, dann ist $t \leq f(x)$, also existiert

ein k mit $\varphi(x|k) \geq t$.

[weil φ Approximation]

Das bedeutet, dass $f, x|k$ die ersten $a(t)$ Werte als t bestimmen. Also $x \in \bigcup [s]$.
g.e.d.

Korollar

Es gilt in der Smolstor

$$(12(2^N)/\equiv_P, \leq_P)$$

Später
die
Wadge-
Hierarchie

haben maximales Element.

Beweis

Arg. doch; sei M maximal.

Dann gilt $K_M = 12(2^N)$.

Dies impliziert nach Lemma 3 aus §10:

$$|F_P| = |12(2^N)|$$

$$2^{(2^{N_0})}$$

Die Kardinalität von F_P ist nach dem
Theorem höchstens die Kardinalität der
Menge aller Approximationen.

Dies sind 2^{N_0} viele: $< 2^{(2^{N_0})}$.

Widerspruch!

q.e.d.

Now: Spieltheoretische Lösung des statischen Furchenspiels
mit Hilfe unseres Theorems.

Das Furchenspiel

$$f: X \longrightarrow X$$

$G(f)$.

$$N^\bullet := N \cup \{M\}$$

wobei $M \notin N$ und für
„ich warte“ steht

$$\begin{array}{ccccccc} \text{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & \dots & x \\ \text{II} & & z_0 & & z_1 & & z_2 & & z_3 & & \dots \end{array}$$

wobei $x_i \in N$, $z_i \in N^\bullet$.

Fall 1 Nur endlich viele $z_i \neq M$. In diesem Fall hat II auswechseln verloren.

Fall 2 Es gibt unendlich viele $z_i \in N$. Sei y_i das i -te Element in $(z_i; i \in \mathbb{N})$, welches eine nat.-Zahl ist.

$$y := (y_i; i \in \mathbb{N})$$

Dann gewinnt II genau $y = f(x)$.

Lemma 2. f ist stetig gdw Spieler II eine GS in $G(f)$ hat.

Beweis " $\implies$ ". Sei f stetig. Nach Thm 1 existiert eine Approx. φ mit

$$f = \hat{\varphi}.$$

Wir definieren eine Strategie τ wie folgt: in Position

$$(x_0, z_0, x_1, z_1, \dots, x_n)$$

betrachte $s := (x_0, \dots, x_n)$ und $\varphi(s)$.

Betrachte $(z_0, \dots, z_{n-1})$ und dann die

Teilfolge $t = (y_0, \dots, y_r)$, wobei ich n -

Böge entfernt habe. Dann ist $t \subseteq \varphi(s)$.

Böge entfernt habe. Dann ist $t \subseteq \varphi(s)$. Ist $ku(t) < ku(\varphi(s))$; so spiele den nächsten Knoten von $\varphi(s)$;

W.

Da φ eine Approximation ist, kann τ nicht gegen Fall 1 verlieren. Also sind wir im Fall 2: $\hat{\varphi} = f$ impliziert, daß τ gegen x gewinnt.

$\Leftarrow$ Sei τ eine GS für Spieler II
 und sei $x \in X$ gegeben. Dann gilt,
 daß der Zug von Spieler II im
 Spiel von τ gegen x exakt $f(x)$
 ist.

Nun wenden wir Thm 1: finde eine
 Approximation für f .

Für vorgegebenes n , sei $t \in F$
 die Folge, die aus $x \upharpoonright n * \tau$ entsteht,
 wenn ich die Wartezüge aus den Zügen
 für Spieler II entferne.

$$\varphi(x \upharpoonright n) := t.$$

Offensichtlich: φ hat Eig. (i) von Approxi-
 mation.

Ang. φ erfüllt auch (ii), also ex. ein N
 mit $\forall k, l \geq N \quad \varphi(x \upharpoonright k) = \varphi(x \upharpoonright l)$.

Das aber bedeutet, daß $x * \tau$ nur endlich
 viele Nichtwartezüge von II hat.

Also das heißt, daß τ gegen x verliert.
 Widerspruch zu τ GS. ∇

q.e.d.