VII

SIEBTE VORLESUNG
Determiniertheit

12. Juni 2025

§ 9 Anwendungen II.

Objekte, die mit AC konstruiert wurden und ihre Komplexität.

z.B. nichttriviale Uf. sind nicht Borel.

Zweites Beispiel:

Wir sagen
$D(x,y) := \{n ; x(n) \neq y(n)\}$
$d(x,y) := |D(x,y)|$
x ist ein **Flipp** von y, falls
$d(x,y) = 1$.

Definition Eine Menge $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ heißt **Flippmenge** falls gilt $\forall x,y$
falls exakt ein n existiert mit $x(n) \neq y(n)$,
so gilt $x \in F \iff y \notin F$.

Offensichtlich
Falls $\{n ; x(n) \neq y(n)\}$ endlich und gerade ist, so gilt
$x \in F \iff y \in F$
und
falls $\{n ; x(n) \neq y(n)\}$ endlich und ungerade ist, so gilt
$x \in F \iff y \notin F$.

Theorem (ZFC) Flippmengen existieren.
Theorem Flippmengen können nicht Borel sein.
} Vorlesung VII

Satz (AC) Es gibt eine Flippmenge.

Beweis Sei $x \sim y$ definiert durch

$\underline{D(x,y) \text{ ist endlich}}$.

Man kann leicht sehen: $\sim$ ist Äq.rel.

Mit AC wählen wir ein Repräsentantensystem für $\sim$:

$$r(x) \in [x]_\sim.$$

Setze $F := \{ x ;\ d(x, r(x)) \text{ ist gerade} \}$

Beh. F ist eine Flippmenge.

Sei also x ein Flipp von y, $d(x,y) = 1$.

Also insbesondere $x \sim y$, also $r(x) = r(y)$.

$$\begin{aligned} x \in F &\iff d(x, r(x)) \text{ ist gerade} \\ &\iff d(y, \underbrace{r(x)}) \text{ ist ungerade} \\ &\qquad\quad \overset{\shortparallel}{d(y, r(y))} \\ &\iff y \notin F. \end{aligned}$$

q.e.d.

Theorem Flippmengen sind nicht Borel.

Wir verwenden das Banach-Mazur-Spiel oder symmetrisches Spiel

Sei $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$. Dann ist $G^{**}(A)$ das BM-Spiel von A definiert durch

$$\begin{array}{lcccccccc} \mathrm{I} & s_0 & & s_2 & & s_4 & & \cdots \\ \mathrm{II} & & s_1 & & s_3 & & s_5 & \end{array}$$

$s_i \in 2^{<\mathbb{N}}$ und $s_i \neq \emptyset$

Die Spielzüge erzeugen $x := s_0 s_1 s_2 \cdots$ und Spieler I gewinnt, falls $x \in A$.

Wie im Falle des asymmetrischen Spiels finden wir über eine Bijektion $\mathbb{N} \longleftrightarrow 2^{<\mathbb{N}}$ eine Menge $A^{**} \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, so daß

$G(A^{**})$ und $G^{**}(A)$

äquivalent sind. A^{**} ist ein stetiges Urbild von A, also: falls A Borel ist, so ist A^{**} Borel und somit $G^{**}(A)$ determiniert.

Satz Falls F eine Flippmenge ist, so ist $G^{**}(F)$ nicht determiniert.

$\Longrightarrow$ Theorem folgt als Korollar.
[unter Verwendung von Borel-Det.]

Beweis **Zunächst.** Sei F eine Flippmenge.

Beh. 1 Falls I GS in $G^{**}(F)$ hat, so hat I GS in $G^{**}(2^{\mathbb{N}} \setminus F)$.

[**Bew. 1.** Betrachte $s := \sigma(\emptyset)$. Sei s' eine Folge mit $lh(s) = lh(s')$ und $d(s, s') = 1$.

Definiere Strategie σ' wie folgt:

$$\sigma'(\emptyset) := s'$$

$$\sigma'(s', s_1, s_2, \ldots, s_n) := \sigma(s, s_1, \ldots, s_n)$$

Dann gilt für alle x, daß

$$\sigma' * x = (s', s_1, s_2, s_3, \ldots)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\sigma * x = (s, s_1, s_2, s_3, \ldots)$$

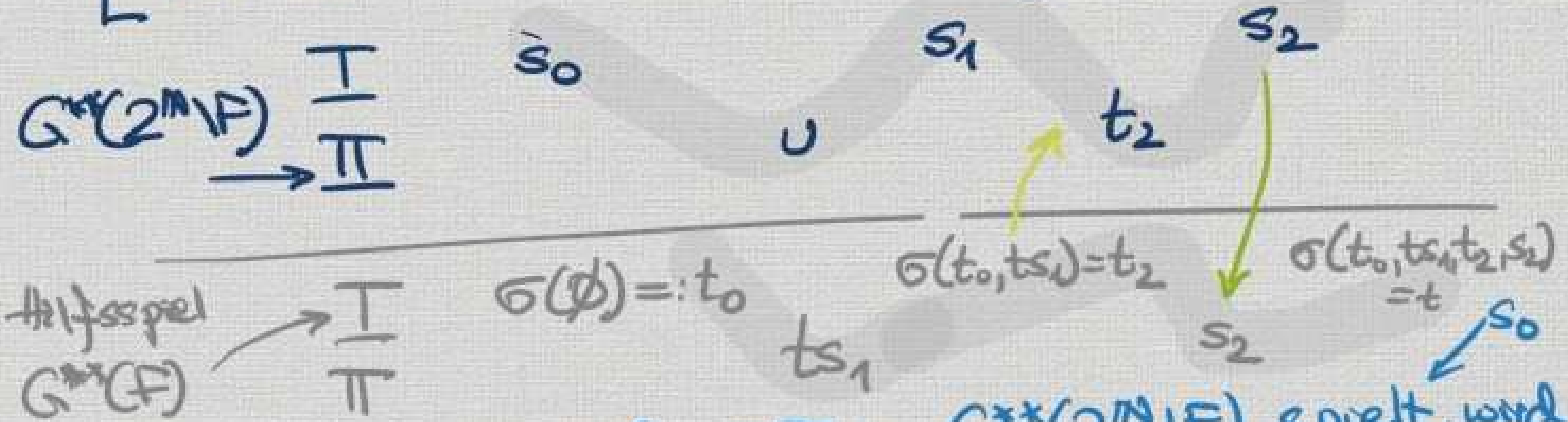
Da $\sigma * x$ eine Folge in F erzeugt und $\sigma' * x$ in genau einem Punkt abweicht, erzeugt $\sigma' * x$ eine Folge in $2^{\mathbb{N}} \setminus F$.]

Beh 2 Ebenso: falls II GS in $G^{**}(F)$, so II GS in $G^{**}(2^{\mathbb{N}} \setminus F)$.

Jetzt: STRATEGIEDIEBSTAHL

<u>Beh. 3</u> Falls I GS in $G^{**}(F)$ $\Longrightarrow$
II GS in $G^{**}(2^{\mathbb{N}} \setminus F)$.

[Wir betrachten wie bei dem Vf. ein Hilfsspiel:



<u>Bem.</u> Was unser Gegner I in $G^{**}(2^{\mathbb{N}} \setminus F)$ spielt, wird nicht kompatible mit t_0 sein.

Finde u und t, so daß
$$lh(s_0 u) = lh(t_0 t)$$
und $lh(s_0 u) = \max(lh(s_0), lh(t_0)) + 1$.
und daß $d(s_0 u, t_0 t)$ gerade ist.

Das Hilfsspiel erzeugt $\boxed{t_0 t} s_1 t_2 s_2 t_3 \ldots =: x$
das echte Spiel erzeugt $\boxed{s_0 u} s_1 t_2 s_2 t_3 \ldots =: y$

D.h. sie unterscheiden sich nur in $t_0 t$ vs $s_0 u$.
Das sind gerade viele Unterschiede,
d.h. $x \in F \iff y \in F$.

Da σ GS für I war, ist $x \in F$, also $y \notin 2^{\mathbb{N}} \setminus F$.]

Bem. Aus Beh. 1+3 folgt, daß I keine GS in $G^{**}(F)$ haben kann.

Beh. 4 Falls II GS in $G^{**}(F)$ hat, so hat I eine GS in $G^{**}(2^{\mathbb{N}}\setminus F)$.

[Wieder ein Hilfsspiel.

$G^{**}(2^{\mathbb{N}}\setminus F)$	I	st		t_1		
	II		s_1		s_2	
Hilfsspiel $G^{**}(F)$	I	s beliebig	s_1		s_2	…
	II	$\tau(s) =: t$		$\tau(s,t,s_1) = t_1$		

In diesem Falle erzeugen beide Spiele exakt die gleiche Folge x, so daß gilt

x ist ein Zug gemäß τ, also $x \notin F$

und somit ein Gewinn für I in $G^{**}(2^{\mathbb{N}}\setminus F)$.]

Also kann auch II nach Beh. 2+4 keine GS haben.

q.e.d.

§ 10 Reduktionen und Komplexität

X Menge
$P \subseteq \mathcal{P}(X)$ eine ~~Eigenschaft~~ von TM von X

Wir nennen eine Fkt. f strukturerhaltend falls Urbilder von Mengen in P wieder in P sind:

$$\forall A \subseteq X \quad A \in P \longrightarrow f^{-1}[A] \in P$$

$\rightarrow$ Falls $\emptyset, X \in P$, so sind konstante Funktionen strukturerhaltend:

$f: X \longrightarrow X$ mit $f(x) = c \quad \forall x.$

$$f^{-1}[A] = \begin{cases} X & \text{falls } c \in A \\ \emptyset & \text{falls } c \notin A \end{cases}$$

Wichtig Dieses Bsp. zeigt, daß "strukturerhaltend" nicht "informationserhaltend" heißt.

Intuitiv. Falls A, f gegeben sind, so kann $f^{-1}[A]$ konstruiert werden: $f^{-1}[A]$ hat also höchstens die Komplexität von A.

Sei $\mathcal{F}_P$ die Menge der strukturerhaltenden Fkt.

Def. $A \leq_P B :\Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}_P \; A = f^{-1}[B]$

$\Longleftrightarrow \exists f \in \mathcal{F}_P \, \forall x \; x \in A \Longleftrightarrow f(x) \in B.$

Was sind die Eigenschaften von $\leq_p$?

① Falls $id \in \mathcal{F}_p$, so gilt $A \leq_p A$, also <u>reflexiv</u>.

② Falls $\mathcal{F}_p$ unter Komposition abgeschlossen ist, so gilt $A \leq_p B$ & $B \leq_p C$ $\Longrightarrow A \leq_p C$, also <u>transitiv</u>.

Wir nennen reflexive und transitive Relationen <u>Präordnungen</u>.

Ist $\leq$ eine Präordnung auf X, so definiere

$$A \equiv B :\Longleftrightarrow A \leq B \ \& \ B \leq A.$$

Dann gilt:
(a) $\equiv$ ist eine Äq.rel.
(b) $\leq$ ist wohldefiniert auf den Äq.klassen
(c) $(X/_{\equiv}, \leq)$ ist eine partielle Ordnung.

Also sind Präordnungen einfach partielle Ordn., in denen alle Punkte durch einen <u>Cluster</u> (d.h. $\equiv$-Äq.klasse) ersetzt sind.

<u>Beispiele</u>

I. $X = 2^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{P}$: offene Mengen

$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$: stetige Funktionen

$A \leq_{\mathcal{P}} B$: A ist ein stetiges Urbild von B

<u>Bem.</u> In §§ 8 & 9 ist dreimal verwendet worden, daß die Borelmengen unter stetigen Urbildern abgeschlossen sind.

II. $X = 2^{\mathbb{N}}$

$\mathcal{P}$: Borel-Mengen

$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$: Borel-meßbare Funktionen

$A \leq_{\mathcal{P}} B$: A ist meßbares Urbild von B

III. $X = \mathbb{N}$

$\mathcal{P}$: berechenbare Mengen

$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$: berechenbare Funktionen

$A \leq_{\mathcal{P}} B$: many-one reduction

IV. $\mathcal{P}$: durch einen polynomiellen Algorithmus berechenbare Mengen

$\mathcal{F}_{\mathcal{P}}$: polynomiell berechenbare Fkt.

P = NP heißt:

es gibt sog. NP-vollständige Probleme SAT

<u>Frage</u> gilt $SAT \leq_{\mathcal{P}} A$ für eine polynomielle Menge A.