VI

DETERMINIERTHEIT
Sechste Vorlesung

5. Juni 2025

§8 Anwendungen. Teil I: Die perfekte Mengeneigenschaft

$G^*(A)$ perfektes Spiel
asymmetrisches Spiel

§9 Anwendungen. Teil II.
Baire-Eigenschaft
Lebesgue-Meßbarkeit

$\boxed{G^{**}(A)}$ symmetrisches Spiel
Banach-Mazur-Spiel

Ultrafilterspiele

Definitionen Wir sagen $F \subseteq \wp(\mathbb{N})$ ist ein **Filter**, falls
$\emptyset \notin F$
$\forall A, B \in F \quad A \cap B \in F$
$\forall A \in F \quad B \supseteq A \Rightarrow B \in F$

Filter sind Mengen von „großen Mengen".

F heißt **Ultrafilter**, wenn er maximal ist,
also $\forall G \quad G \supsetneq F$, so ist G kein Filter

Einfache ÜA F ist ultra $\Longleftrightarrow \forall A \quad A \in F$ oder $\mathbb{N} \setminus A \in F$

Satz (ZFC) Jeder Filter F kann zu einem Ultrafilter erweitert werden.

Beweisskizze. Typische Anwendung des Zornschen Lemmas. Betrachte

$$P_F := \{ G ;\ G \supseteq F \ \&\ G \text{ Filter} \}.$$

Zeige, daß P_F die Bedingungen des ZL erfüllt. Also gibt ZL ein max. Elt. Das ist ein Ultrafilter. q.e.d.

Identifiziere $2^{\mathbb{N}}$ und $\wp(\mathbb{N})$ über die charakteristische Funktion. Dann sind Filter TM von $2^{\mathbb{N}}$ und wir können fragen:

Gibt es einen Ultrafilter, der Borel ist?

Antwort: Ja!

z.B. $U_0 := \{ A \subseteq \mathbb{N} ;\ 0 \in A \}$ ist ein Ultrafilter (leicht zu überprüfen).

Als TM von $2^{\mathbb{N}}$ ist

$$U_0 = \{ x \in 2^{\mathbb{N}} ;\ x(0) = 1 \}$$

Dies ist eine ε-Kugel im Cantorraum, also eine offene Basismenge.

Ebenso für $U_n := \{ A \subseteq \mathbb{N} ;\ n \in A \}$.

Der Fréchet-Filter ist

$$F := \{A;\ \underbrace{\mathbb{N}\setminus A \text{ ist endlich}}_{A \text{ ist ko-endlich}}\}$$

Dies ist ein Filter (leicht zu überprüfen), aber kein Ultrafilter, da $2\mathbb{N}$ & $2\mathbb{N}+1$ beide nicht ko-endlich sind.

Falls U ein Ultrafilter ist, der F fortsetzt, so kann U nicht von der Form U_n sein:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{N}\setminus\{n\} \in F \\ \{n\} \in U_n \end{array}\right\} \Longrightarrow F \subseteq U_n \Longrightarrow \begin{array}{c} \mathbb{N}\setminus\{n\} \cap \{n\} = \emptyset \\ \in U_n \\ \text{Widerspruch.} \end{array}$$

Gibt es einen Ultrafilter, der den Fréchetfilter fortsetzt und Borel ist?

Antwort: Nein [Beweis über Borel-Determiniertheit]

Ultrafilterspiele

Sei U ein Ultrafilter.

$$G^{UF}(U) \quad \begin{array}{l|llll} \mathrm{I} & x_0 & x_1 & x_2 & \dots \\ \hline \mathrm{II} & & y_0 & y_1 & \dots \end{array}$$

mit x_i, y_i endliche TM von $\mathbb{N}$ und für alle i

$$x_i \notin \bigcup_{j<i} x_j \cup \bigcup_{j<i} y_j$$

$$y_i \notin \bigcup_{j<i} x_j \cup \bigcup_{j<i} y_j$$

DISJUNKTHEITSREGEL (DR)

$$A := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} x_i$$

$$B := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} y_i$$

Wir sagen, Spieler I gewinnt, falls $A \in U$.

Bemerkung: Falls $U = U_n$, so hat I eine GS. Spiele n im allerersten Zug.

Wir werden zeigen:

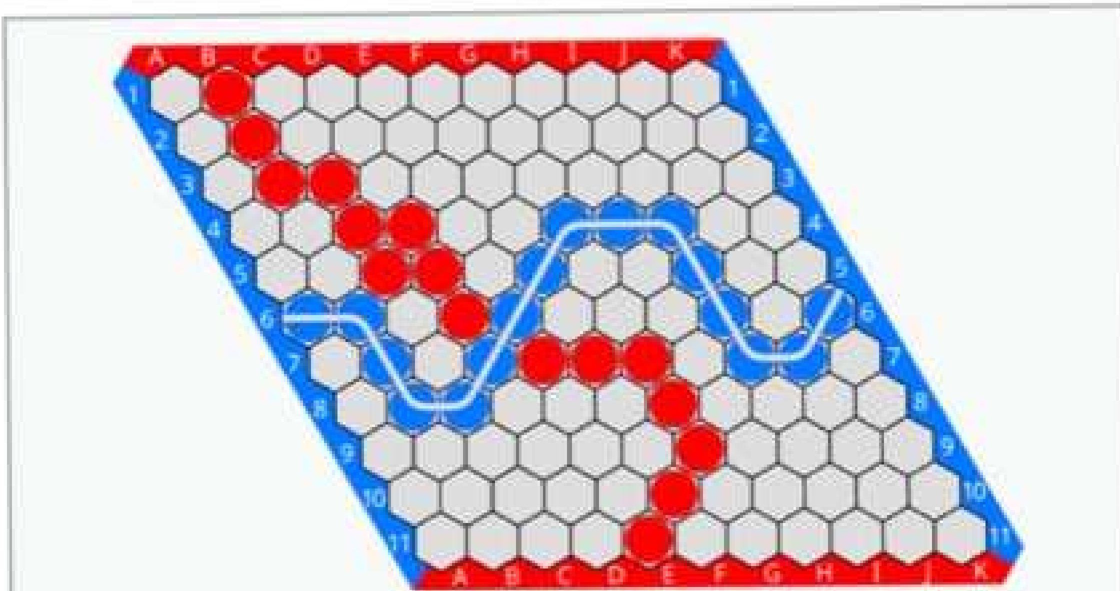
THEOREM: Falls U ein UF. ist, der den Fréchetfilter fortsetzt, so ist $G^{UF}(U)$ nicht determiniert.

Korollar: Also kann U in diesem Falle nicht Borel sein.

Beweisidee: Strategiediebstahl

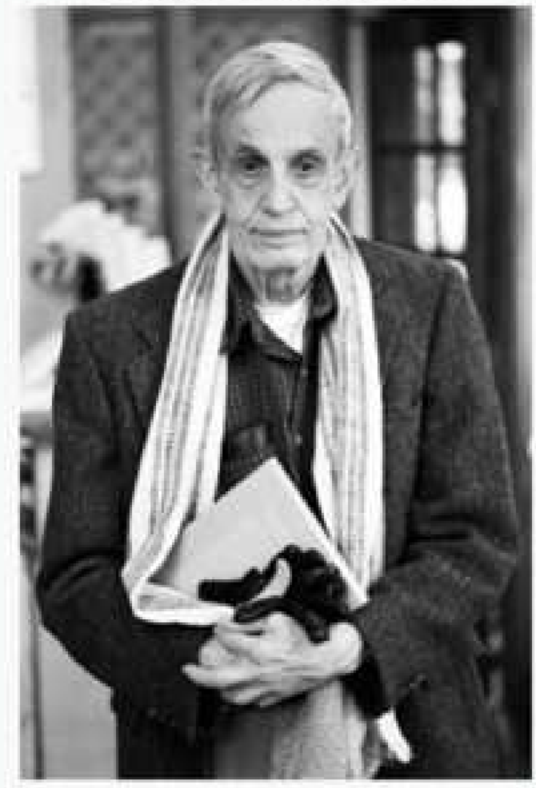
Strategiediebstahl

Hex



11×11 Hex gameboard showing a winning configuration for Blue

John Forbes Nash Jr.



Nash in the 2000s

Born	June 13, 1928 Bluefield, West Virginia, U.S.
Died	May 23, 2015 (aged 86) Monroe Township, New Jersey, U.S.

Theorem (Nash) Spieler I hat eine GS in Hex.

Beweisstruktur.

1. Hex ist endlich, also hat entweder I oder II GS.
2. Jede GS für II kann in eine GS für I transformiert werden.

$\Longrightarrow$ II kann keine GS haben.

$\Longrightarrow$ I hat eine GS.

Skizze Eine Strategie für II ist wie eine Strategie für I, außer daß ein Feld als VERBOTEN markiert wurde. Wenn ich mit dieser zusätzlichen Einschränkung gewinnen kann, dann erst recht ohne.

Beweis des Theorems

U Ultrafilter, der den Fréchetfilter fortsetzt.

$G^{UF}(U)$: wollen zeigen, daß dieses Spiel nicht det. ist.

Wir wollen durch Strategiediebstahl zeigen:

1. Falls II eine GS in $G^{UF}(U)$ hat, so hat I eine GS.
   [$\Rightarrow$ II kann keine GS haben]
2. Falls I eine GS in $G^{UF}(U)$ hat, so hat II eine GS.
   [$\Rightarrow$ I kann keine GS haben]

Beweisen wir 1: Sei τ eine GS für II.

$G^{UF}(U)$

I	y_0		y_1		$\longrightarrow A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} y_i$
II		z_0		z_1	$\longrightarrow B = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} z_i$

Wir wollen eine Strategie σ definieren, die GS für I ist.

$G^{UF}(U)$

I	$\emptyset$		z_0	z_1	$\longrightarrow \emptyset \cup B = B$
II		$\tau(\emptyset) =: y_0$		$\tau(\emptyset, y_0, z_0) =: y_1$	$\longrightarrow A$

HILFSSPIEL

Weil τ GS für II ist, ist $B \notin U$.
Das gibt uns nicht notwendigerweise, daß $A \in U$.

Def. τ **respektiert die DR**, falls $\forall p$

$$\tau(p) \cap \bigcup p = \emptyset.$$

Insbesondere respektieren alle GS die DR.

Beobachtung Falls τ, τ' beide die DR respektieren und $\forall p \quad \tau(p) \subseteq \tau'(p)$ und τ ist GS, dann ist τ' GS.

Def. Wir sagen τ ist **komplementär** falls für jeden Spielverlauf, der konsistent mit τ ist, gilt $A = \mathbb{N} \setminus B$.

Lemma Falls τ eine Strategie ist, welche die DR respektiert, so ist τ' eine komplementäre Strategie, die die DR respektiert, wobei τ' definiert ist durch:

$$\tau'(p) := \begin{cases} \tau(p) & i \in \bigcup p \\ \tau(p) \cup \{i\} & i \notin \bigcup p \end{cases}$$

falls $\mathrm{lh}(p) = 2i$ oder $\mathrm{lh}(p) = 2i+1$

Beweis: klar nach Konstruktion.

KOROLLAR Jede GS kann zu einer komplementären GS modifiziert werden.

D.h. OBdA können wir davon ausgehen, daß unsere GS komplementär ist.

Vervollständigung des Beweises von ①:

Sei τ GS für II; oBdA komplementär.
Spiele das Hilfsspiel wie auf S. 6
und erhalte A als Spiel für I.

Die Tatsache, daß τ GS für II gibt

$$B \notin U,$$

aber $A = \mathbb{N}\setminus B$, also, da U Uf., gilt

$$A \in U.$$

q.e.d. ①

<u>Beweis für ②</u>. Sei σ eine GS für I.

$G^{UF}(U)$				
I	x_0	x_1	$\dots$	$C = x_0 \cup B$
II	$y_0\setminus x_0$	$y_1 \setminus x_0$	$\dots$	$A' = A\setminus x_0$

<u>HILFSSPIEL</u>

$G^{UF}(U)$				
I	$\sigma(\emptyset)=y_0$	$\sigma(y_0,x_1)=y_1$	$\dots$	$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} y_i$
II	x_1		$\dots$	$B = \bigcup_{i\geq 1} x_i$

Da σ GS für I, ist $A \in U$. [$\Rightarrow B \notin U$.]

Ang. $C \in U$. Betrachte $X = \mathbb{N}\setminus x_0 \in F \subseteq U$.

Dann ist $C \cap X = C \setminus x_0 = B \in U$. Widerspruch!

q.e.d. ②

q.e.d. <u>Theorem</u>.

Bemerkung Es gibt einen Zsh. zwischen Ultrafiltern und LM.

Sierpiński 1938:
Falls U ein Ultrafilter ist, der den Fréchetfilter fortsetzt, so kann U als TM von $2^{\mathbb{N}}$ interpretiert, nicht LM sein.

Definition Eine Menge $F \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ heißt **Flippmenge** falls gilt $\forall x, y$
falls exakt ein n existiert mit $x(n) \neq y(n)$,
so gilt $x \in F \iff y \notin F$.

Offensichtlich
Falls $\{n ; x(n) \neq y(n)\}$ endlich und gerade ist, so gilt
$$x \in F \iff y \in F$$
und
falls $\{n ; x(n) \neq y(n)\}$ endlich und ungerade ist, so gilt
$$x \in F \iff y \notin F.$$

Theorem (ZFC) Flippmengen existieren.
Theorem Flippmengen können nicht Borel sein.
$\}$ Vorlesung VII