

DETERMINIERTHEIT

22. Mai 2025

Fünfte Vorlesung

Def. Falls $X = 2 = \{0, 1\}$, so nennen wir

$X^{\mathbb{N}}$ den **Cantorraum**.

Falls $X = \mathbb{N}$, so nennen wir $X^{\mathbb{N}}$ den **Baireaum**.

VORLESUNG IV

Es gilt uns folgende Begriffe:

① ϵ -Kugeln

$$B_{\epsilon}(x) := \{y; d(x, y) < \epsilon\}$$

$$\text{Bsp } B_{\frac{1}{2}}(x) = \{y; y(0)=x(0) \wedge y(1)=x(1)\}$$

"Kugeln sind Kegel"



②

offene Menge:

$$A \text{ ist offen} : \Leftrightarrow \forall x \in A \exists \epsilon B_{\epsilon}(x) \subseteq A.$$

③

Konvergenz:

$$x_n \rightarrow x \Leftrightarrow \forall \epsilon \in \mathbb{N} \forall n > N d(x, x_n) < \epsilon$$

④

Abgeschlossene Menge

$$\forall \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq A \text{ und } x_n \rightarrow x, \text{ gilt } x \in A.$$

⑤

Dichte Menge

$$D \subseteq X^{\mathbb{N}} \text{ dicht} : \Leftrightarrow \forall \epsilon \forall x \exists d \in D d(x, d) < \epsilon$$

Korollar

BAUMDARSTELLUNG ABGESCHLOSSENER MENGEN

Eine Menge A ist abgeschlossen gdw. ein Baum T existiert mit $A = [T]$.

Vorlesung I: T perfekt $\Rightarrow |[T]| = 2^{\aleph_0}$.

Vorlesung IV:

§8 Anwendungen, Teil I:

Perfekte Mengen

Eingangs

Bemerkung A

$$[\forall T \text{ perfekt } [T] \not\subseteq A \text{ und } [T] \cap A \neq \emptyset]$$

Konstruiert mittels AC.

Das impliziert, daß nichtdeterminierte Mengen existieren.

Zusammenhang mit CH — Kontinuumshypothese.

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar, so $|A| = |\mathbb{R}|$.

PSP

Perfekte Mengeneigenschaft

$\forall A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ falls A überabzählbar, so ex. T perfekt $[T] \subseteq A$.

Falls PSP, so CH.

Aber: Bemerkung sind ein Gegenbsp. zu PSP.

NÄCHSTE VORLESUNG (V): 20.22.5. 14-16 ZOOM

A hat die perfekte Mengeneigenschaft
falls A abzählbar ist oder eine perfekte TM enthält.

PSP: Jede Menge hat die PME.
[$\Leftrightarrow$ Jede überabz. Menge enthält eine
perfekte Menge.]

PSP $\Rightarrow$ CH.

[Falls $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ beliebig. Dann hat A
nach PSP die perfekte Mengeneigenschaft.
Also:

Fall 1 A ist abzählbar.

Fall 2 A enthält perfekte TM P .

$$2^{\aleph_0} = |P| \leq |A|$$

$$\Rightarrow |A| = |2^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0} \quad]$$

Üblicherweise schreiben wir

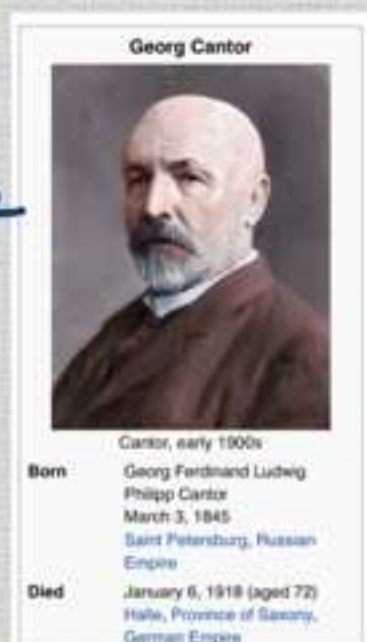
$$\text{CH} \Leftrightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

[falls $2^{\aleph_0} > \aleph_1$, so gilt: ex. eine
Bijektion $f: \aleph_k \rightarrow \mathbb{R} \quad k \geq 2$.

Dann ist $f[\aleph_1] \subseteq \mathbb{R}$ eine
überabz. TM von $\mathbb{R}$ mit Kardinalität
 $\aleph_1 < |\mathbb{R}| = \aleph_k$.]

Satz von Cantor & Bendixson

✓ Jede abgeschlossene Menge hat die PME.



Fragen

Q1

Gilt PSP?

Q2

Hat jede Borelmenge die PME?

Antworten

Q1: NEIN!

In VL II hatten wir Bernsteinmengen konstruiert: $A \subseteq 2^{\mathbb{N}}$ mit $|A| = |2^{\mathbb{N}} \setminus A| = 2^{\aleph_0}$

und weder A noch $2^{\mathbb{N}} \setminus A$ enthalten eine perfekte Menge.

Achtung: Dieser Beweis verwendete AC!

Q2: Ja! Anfang des 20. Jhdts
SATZ VON HAUSDORFF
Jede Borelmenge hat die PME

Wir werden hierfür einen Spielbeweis geben —
unter Annahme der Borel-Determiniertheit.

Das perfekte Spiel / asymmetrisches Spiel.

$$A \subseteq 2^N$$

$$\text{I} \quad s_0 \in 2^{<N}$$

$$s_1 \in 2^{<N}$$

$$\text{II}$$

$$x_0 \in 2$$

$$x_1 \in 2 \dots$$

Position : $(s_0, x_0, s_1, x_1, s_2, x_2, \dots, s_{i-1}, x_{i-1}) = p$
 $p^* := s_0 x_0 s_1 x_1 \dots s_{i-1} x_{i-1} \in 2^{<N}$

Falls z ein Spielverlauf

$$z \in (2^{<N})^N, \text{ so ist } z^* := s_0 x_0 s_1 x_1 \dots \in 2^N$$

Wir sagen Spieler I gewinnt den Spielverlauf z , falls $z^* \in A$.

Bezeichnung: $G^*(A)$.

Satz Falls A perfekte TM erfüllt, so hat I GS;

falls A abzählbar ist, so hat II GS.

Beweis II ist exakt der gleiche Beweis wie in VL I : falls $A = \{a_i; i \in N\}$, so spielt II im i -ten Zug $1 - a_i(k)$, wobei k die Stelle ist, an der das Spiel zu dem Zeitpunkt ist.

I: falls T perfekt, so ist die Strategie für I "spiele stets den nächsten Verzweigungspunkt in T " eine GS für I.
 g.e.d.

Theorem Falls $G^*(A)$ determiniert ist, so hat A die PME.

Beweis. Zwei Fälle: I GS oder II GS.

I: Falls σ eine GS für I ist, so ist T_σ^I vollständig in der Gewinnmenge von $G^*(A)$ enthalten.

Das bedeutet, daß

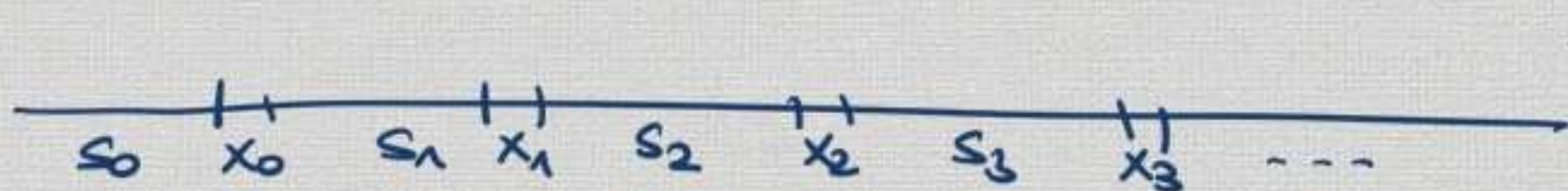
$$T^* := \{p^* ; p \in T_\sigma^I\}$$

ein perfekter Baum ist mit $[T] \subseteq A$.

II: [Dies ist der nichttriviale Teil des Beweises.]

Angenommen, II hat eine GS τ .

Sei $x \in A$. Dann gibt es keine Aufteilung



so daß x_i jeweils die τ -Antwort auf die vorige Position ist. [Sowas wäre $x \notin A$.]

Es gibt also eine Position p , die konsistent mit τ ist, aber nicht konsistent mit τ fortgesetzt werden kann.

Def. p ist τ -maximal für x , falls
 $\underline{p^* \subseteq x}$, p ist konsistent mit τ
 $[\forall i \quad x_i = \tau(s_0, x_0, s_1, x_1, \dots, s_i)]$
 und für alle s
 falls $p^*s \subseteq x$, so
 $\underline{\tau(p, s) \neq x(\text{au}(p^*s))}$

Nach dem vorigen:

Für alle $x \in A$ ex. ein τ -maximales p .

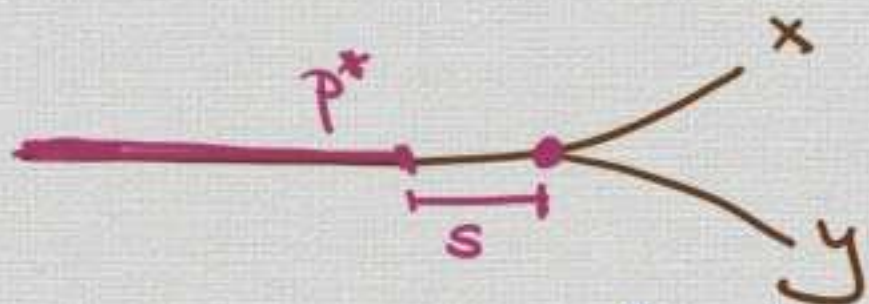
Beh. Jedes p ist für höchstens eine x τ -maximal.

[Sei p τ -maximal für x, y . mit $x \neq y$,
 also sei k minimal mit $x(k) \neq y(k)$.

Nach Def. $p^* \subseteq x$, $p^* \subseteq y$. Also $k > \text{au}(p^*)$.

Finde s mit

$$p^*s = x \upharpoonright k = y \upharpoonright k$$



Nach Def. $\tau(p, s) \neq x(k)$ Aber wir haben
 $\tau(p, s) \neq y(k)$ nur zwei
 Werte. $\downarrow$

Damit ist $x \mapsto p$ wobei p die eindeutig
 bestimmte Besitzsee, welche
 τ -maximal für x ist, ist
 eine bijektion! Aber $(2^{\aleph})^{\aleph}$ ist
 abzählbar, also ist A abzählbar.
 g.e.d.

Korollar

A hat die PME



$G^*(A)$ ist determiniert

Verlockend zu folgern, daß Barcl-Det. impliziert,
daß alle Barclungen die PME haben.

Aber Barcl-Det. redet über $G(A)$, nicht $G^*(A)$.

Bleibt zu zeigen, daß Barcl-Det. impliziert, daß
alle $G^*(A)$ für A Barcl determiniert sind.

Versuche, $G^*(A)$ als eine $G(A^*)$ darzustellen.

$$A^* := \{ z \in \underbrace{(2^{<N})^N}_{\substack{\uparrow \\ \text{Identifiziere } 2^{<N} \text{ mit } N \text{ über die} \\ \text{Binärdarstellung}}} ; z^* \in A \}$$

$$= \{ z \in N^N ; z^* \in A \}$$

Setze $\pi(z) := z^*$. Dann ist $\pi: N^N \rightarrow 2^N$
(partiell) Abbildung.

Dann ist $A^* = \pi^{-1}[A]$. und es gilt, daß

$G^*(A)$ und $G(A^*)$ äquivalent sind

$$\begin{array}{ccc} \Leftrightarrow & \text{I hat GS f. d. } G^*(A) & \text{I hat GS f. d. } G(A^*) \\ & \text{II} & \text{II} \end{array}$$

Damit gilt:

falls π -Urbilder von Borel-Mengen Borel sind, so liefert uns Borel-Det.

die Det. von $G^*(A)$ für A Borel.

Es reicht hier zu zeigen, daß π stetig ist, d.h. π -Urbilder von offenen ε -Kugeln sind offen.

Sei nun $B \subseteq 2^N$ eine ε -Kugel, also

$$B = \{x \in 2^N; s \subseteq x\} \text{ für ein } s \in 2^N$$

$$\text{Betrachte } \pi^{-1}[B] = \{z \in N^N; z^* \in B\} \\ = \{z \in N^N; s \subseteq z^*\}$$

Sei $z_0 \in \pi^{-1}[B]$. Zeige, daß es eine ε -Kugel um z_0 gibt, die ganz in $\pi^{-1}[B]$ liegt.

$$s \subseteq (z_0)^*$$

Also ex. $t \subseteq z_0$ mit $s \subseteq t^* \subseteq (z_0)^*$.

Betrachte $B' = \{z \in N^N; t \subseteq z\}$ [ε -Kugel in N^N]

Dann gilt $\pi[B'] \subseteq B$, also $B' \subseteq \pi^{-1}[B]$.

Das war zu zeigen. q.e.d.

Zusammen: Borel-Determiniertheit

$\implies$
Satz von Hurewicz

§9 Anwendungen II: weitere Anwendungen

Andere Eigenschaften

Baire-Eigenschaft

"A hat die BE falls sie von der Form $P \Delta M$ ist, wobei P offen und M abgeschlossen ist"

Das entsprechende Spiel $G^{**}(A)$

Banach-Mazur-Spiel

Symmetrisches Spiel

gibt eine ähnliche Spielcharakterisierung der BE.

Lebesgue-Maßbarkeit

Auch hier kann man mit AC Beispiele für Nicht-Lebesgue-messbare Mengen konstruieren. (VITALI)

Das Spiel $G_{\Sigma}(A)$

Überdeckungsspiel

gibt eine ähnliche Spielcharakterisierung der LM.

René-Louis Baire



Born	21 January 1874 Paris
Died	5 July 1932 (aged 58) Chambéry
Nationality	French

Henri Lebesgue



Born	June 28, 1875 Beauvais, Oise, France
Died	July 26, 1941 (aged 66) Paris, France
Nationality	French

Man beachte:

Bei allen drei Eigenschaften braucht
das Gegenbsp. AC.

Das ist wichtig:

Die spieltheoretische Charakterisierung
bedeutet, daß

AD Axiom der Determiniertheit
"Jede Menge ist determiniert"

impliziert, daß jede Menge die drei
Eigenschaften hat.

Dies ist keine Probleme für die Grundlagen
der Mathematik, da

$$AD \Rightarrow \neg AC$$

$$AC \Rightarrow \neg AD.$$

Vorlesung VI [Nächste Do ist Himmelfahrt — keine Vorlesung;
also Do 5. Juni 2025 14:15]

Es gibt keinen Borel-Ultrafilter, der nichttrivial
ist. [Spieltheoretisch, mit neuer
Beweisidee.]