Determiniertheit IX

Neunte Vorlesung

26. Juni 2025

Vorlesung VIII

Vorlesung VII: Komplexitätshierarchien $\leq_P$
P: offene Menge
$\leq_P$: stetigen Reduktion

Theorem 1 f ist stetig $\iff$ $\exists \varphi$ Approximation mit $f = \hat{\varphi}$.

Das Funktionsspiel $G(f)$.

$f: X \longrightarrow X$

$\mathbb{N}^\circ := \mathbb{N} \cup \{W\}$ wobei $W \notin \mathbb{N}$ und für „ich warte" steht

$$\begin{array}{lcccccccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & & \cdots & x \\ \mathrm{II} & & z_0 & & z_1 & & z_2 & & z_3 & \cdots & \end{array}$$

wobei $x_i \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{N}^\circ$.

Fall 1 Nur endlich viele $z_i \neq W$. In diesem Fall hat II automatisch verloren.

Fall 2 Es gibt unendlich viele $z_i \in \mathbb{N}$. Sei y_i das i-te Element in $(z_i; i \in \mathbb{N})$, welches eine nat. Zahl ist.

$$y := (y_i; i \in \mathbb{N})$$

Dann gewinnt II gdw $y = f(x)$.

Theorem 2. f ist stetig gdw Spieler II eine GS in $G(f)$ hat.

Erinnerung τ GS, dann ist $x \longmapsto (x * \tau)_{\mathrm{II}}$ ist eine stetige Funktion.

§ 12 Die Wadge-Hierarchie

William W. Wadge

Professor Emeritus at University of Victoria

Computer Science

PhD 1983

Ursprünglich Mitte der 1970er Jahre bewiesen.

Zsh. zwischen $\le_P$ für P = offene Mengen und Spielen, nämlich dem Red.spiel.

$X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $\qquad P$ = offene Mengen

$F = \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ $\qquad \mathcal{F}_P$ = stetige Funktionen

$\forall x$ $x \in A \longleftrightarrow f(x) \in B$

$\iff$

$\forall x$ $x \in A \to f(x) \in B$ $\wedge$ $x \notin B \to f(x) \notin B$

$$A \le_P B \ :\iff \ \exists f \text{ stetig } \quad A = f^{-1}[B]$$

Ab sofort $\le_W$: **Wadge-Reduktion**

Wichtige Bemerkung: $\quad A \le_W B \iff X \setminus A \le_W X \setminus B$

Vorlesung VIII

Wir nennen die $\equiv_W$-Äquivalenzklassen nun **Wadge-Grade**.

Folgerung aus der Bemerkung:

Falls $A \leq_W X \setminus A$, so $A \equiv_W X \setminus A$.

$[\ A \leq_W X\setminus A \underset{\text{Bem.}}{\Longrightarrow} X\setminus A \leq_W X \setminus (X\setminus A) = A.\ ]$

Jede Menge ist entweder äquivalent zu ihrem Komplement. oder unvergleichbar zum Komplement.

Bsp. $\emptyset$ und X sind unvergleichbar.

Def. Falls d ein Wadge-Grad ist, so definiere

$$\breve{d} := [X\setminus A], \text{ falls } A \in d.$$

SPRICH: "d dual"

[ÜA. Überprüfe, daß $\breve{d}$ wohldefiniert ist.]

Dies nennen wir den zu d dualen Grad.

Def. d ist selbstdual, falls $d = \breve{d}$.
Sonst ist d nichtselbstdual (nsd).

Bsp. $(\emptyset, X)$ ist ein nsd Paar.

Fragen Gibt es andere nsd Paare?
Gibt es selbstduale Grade?
Gibt es überhaupt mehr als drei Grade?

Bem 1. (a) Falls $A \leq_W B$ und B offen, so ist A offen. [Nach Def.]

(b) Falls $A \leq_W B$ und B abgeschl., so ist A abgeschlossen.
[Aus (a) + Wichtige Bem.]

Unmittelbare Folgerung.
Falls A nicht offen, B offen

$$A \not\leq_W B.$$

Also gibt es mehr als drei Grade.

ε-Kugeln

Mehr noch: Falls A offen und abgeschlossen
B offen und nicht abgeschl.

z.B. $X \setminus \{\vec{0}\}$

dann gilt $B \not\leq_W A$.
Also gibt es mindestens vier Wadgegrade mit offenen Mengen.

[Bem. Falls d eine offene Menge enthält, so sind alle Mengen in d offen. Genauso für abgeschlossen.]

Das Wadge-Spiel $A, B \subseteq X$

$$G_W(A,B) \quad \begin{array}{lccccccccc} \mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 & \cdots & \nearrow x \\ \mathrm{II} & & z_0 & & z_1 & & z_2 & & \cdots & \end{array}$$

$x_i \in \mathbb{N}$ Falls nur endlich viele $z_i \in \mathbb{N}$,
$z_i \in \mathbb{N} \cup \{W\}$ so hat II verloren.

Falls ∞ viele $z_i \in \mathbb{N}$, so bilde $y = (y_i ; i \in \mathbb{N})$ durch ~~Entfernen~~ der Ws.

Dann gewinnt Spieler II, falls

$$x \in A \iff y \in B.$$

Theorem (Wadge)
$A \leq_W B$ gdw Spieler II hat eine GS in $G_W(A,B)$

Beweis "$\Longrightarrow$". $A \leq_W B$ heißt: es ex. f stetig mit $f^{-1}[B] = A$. Nach Thm 2 ex. eine GS für Spieler II in $G(f)$.
Spiele ich diese Strategie in $G_W(A,B)$, so erhalte ich

$$x \in A \iff f(x) \in B \iff y \in B.$$

Zug gemäß τ.

"$\Longleftarrow$". Angenommen, τ is GS für II in $G_w(A,B)$. Diese liefert uns nach Thm 1 eine stetige Funktion

$$f : x \longmapsto (x*\tau)_{\underline{II}}.$$

Aber, da τ GS ist, gilt

$$x \in A \implies f(x) \in B$$
$$x \notin A \implies f(x) \notin B.$$

Also $A \leq_w B$. q.e.d.

ANWENDUNGEN

(1) Seien $s,t \in F$ mit

$[s] := \{x ; s \subseteq x\}$ offene

$[t] := \{x ; t \subseteq x\}$ ε-Kugeln.

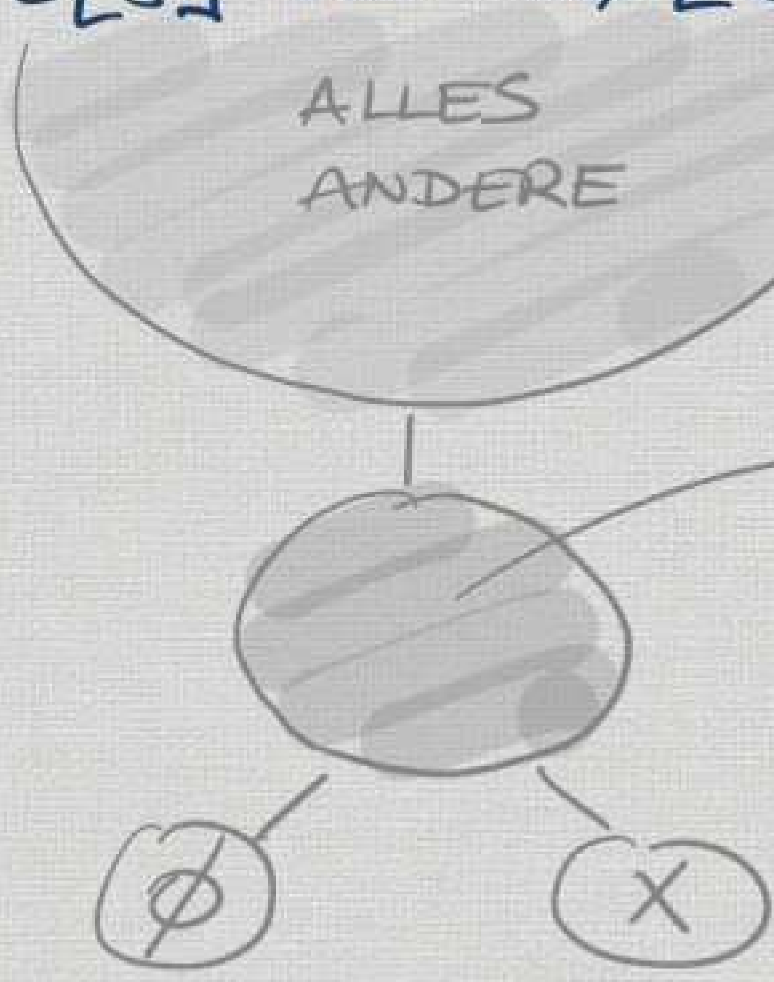
Dann gilt: $[s] \equiv_w [t]$.

genügt z.z. $\forall s,t\ [s] \leq_w [t]$.

[Als Spieler II warte ich einfach die ersten lh(s) ~~Zügen~~ ab. Falls Spieler I s gespielt hat, spiele ich ein Elt. von $[t]$; falls Spieler II eine Folge $\neq s$ gespielt hat, spiele ich ein Elt. von $X \setminus [t]$.]

② Falls $\emptyset \neq A \neq X$ und $s \in F$, so gilt
$$[s] \leq_w A.$$

[Exakt der gleiche Beweis wie ①: warte $lh(s)$ Züge und spiele dann entweder $y \in A$ oder $y \notin A$, je nachdem ob $x \in [s]$ oder $x \notin [s]$.]



enthält alle $[s]$ für $s \in F$, $s \neq \emptyset$.

Warum ist dies selbstdual? Weil $X \setminus [s]$ weder $\emptyset$, noch X ist, also nach Anwendung ② $[s] \leq X \setminus [s]$
$\Longrightarrow [s] \equiv X \setminus [s]$.

<u>HA.</u> Zeigen Sie, daß falls $A, B \in d$ und $A \leq_w X \setminus A$, so $B \leq_w X \setminus B$.

<u>Bem.</u> Falls A offen, nicht abgeschlossen, so $X \setminus A$ abgeschlossen $\Longrightarrow A \not\leq_w X \setminus A$, also ex. ein weiterer nsd Grad.

③ Betrachte

$$P = \{x;\ \text{es ex. } \infty \text{ viele } n \text{ mit } x(n) = 0\}$$

Dies ist eine Borelmenge.

Falls $P \leq_W A$, so enthält A eine nichtleere perfekte TM.

<u>Skizze</u> $\underset{\in P}{\vec{0}} \neq \underset{\notin P}{\vec{1}}$ Sei f, so daß $f^{-1}[A] = P$.

Also ist $\underset{\in A}{f(\vec{0})} \neq \underset{\notin A}{f(\vec{1})}$. Also ex. s und $a \neq b$

mit $sa \subseteq f(\vec{0})$, $sb \subseteq f(\vec{1})$.

Da f stetig ist, ex. nach Thm 1 ein n mit 0^n bestimmt bereits f auf sa
1^n bestimmt bereits f auf sb.

$\underset{\in P}{\vec{0} = 0^n\vec{0}}$ $\quad \underset{\notin P}{0^n\vec{1}}$ $\quad \underset{\in P}{1^n\vec{0}}$ $\quad \underset{\notin P}{1^n\vec{1} = \vec{1}}$

$f(0^n\vec{0}) \neq f(0^n\vec{1})$	$f(1^n\vec{0}) \neq f(1^n\vec{1})$
Finde t und $c \neq d$ mit	Finde u und $e \neq g$ mit
$\underline{satc} \subseteq f(0^n\vec{0}) \in A$	$\underline{sbue} \subseteq f(1^n\vec{0}) \in A$
$satd \subseteq f(0^n\vec{1})$	$sbug \subseteq f(1^n\vec{1})$

Wir erhalten zwei verschiedene Elt von A.
Setzen wir dies fort, bekommen wir eine Injektion von $2^{\mathbb{N}}$ in A $\longrightarrow$ perfekte TM.

THEOREM (Wadge-Lemma)

Falls $G_W(A,B)$ determiniert ist, so gilt entweder $A \leq_W B$ oder $B \leq_W X \setminus A$.

Beweis Wir haben entweder GS für I oder II.

Falls GS für II, so nach Theorem von Wadge $A \leq_W B$.

Ang. GS für I. Sei σ eine solche: diese erzeugt immer eine Strategie für Spieler II, die nicht verlieren kann durch Verletzung der Wortregel.

$$
\begin{array}{lccccccc}
\mathrm{I} & x_0 & & x_1 & & x_2 & & x_3 \quad \cdots \\
\mathrm{II} & & \underset{y_0}{\overset{\parallel}{\sigma(\emptyset)}} & & \underset{y_1}{\overset{\parallel}{\sigma(y_0x_0)}} & & \underset{y_2}{\overset{\parallel}{\sigma(y_0x_0y_1x_1)}} & \cdots
\end{array}
$$

Da σ GS für I ist, gilt

$$
\begin{aligned}
y \in A &\iff x \notin B. \\
&\iff x \in X \setminus B.
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Bem. Da σ so speziell ist, zeigt WL eigentlich für den Fall $B \leq_W X \setminus A$ viel mehr.

④ [Anwendung]
Falls B eine Bernsteinmenge ist und P die Menge aus Anwendung ③, so ist $G_W(P,B)$ nicht determiniert.

[Ang. $G_W(P,B)$ ist determiniert.
Falls II gewinnt, so $P \leq_W B$ nach Theorem. Nach Anw. ③ enthält B eine nichtleere perf. TM.
Falls I gewinnt, so $B \leq_W X \setminus P$ nach Wadge's Lemma.
Aber P ist Borel $\Longrightarrow$ $X \setminus P$ ist Borel
$\Longrightarrow$ B ist Borel, da stetige Urbilder von Borelmengen Borel sind.
Aber nach dem Kapitel über das perfekte Spiel haben alle Borelmengen die PME und Bernsteinmengen haben sie nicht. Also können Bernsteinmengen nicht Borel sein.]

Konsequenzen

① Außerhalb der Borelmengen kann (muß) es nichtdeterminierte Wadgespiele geben.

② Eingeschränkt auf die Borelmengen erhalten wir:

Falls A, B $\leq_W$-unvergleichbar sind, so ist $B \equiv_W X \setminus A$.

$$\left[\begin{array}{l} A \not\leq_W B \xRightarrow{WL} \boxed{B \leq_W X\setminus A} \\ B \not\leq_W A \xRightarrow{WL} A \leq_W X\setminus B \xRightarrow{Bem.} \boxed{X\setminus A \leq B} \end{array}\right]$$

$$B \equiv_W X\setminus A.$$

SEMILINEARE ORDNUNG

Alles ist vergleichbar außer nsd Paare.

D.h. die Struktur sieht ungefähr so aus

Gibt es unbeschränkt viele Paare oder sd Grade; absteigende Ketten, aufsteigende Ketten usw.