Determiniertheit IV

7. Mai 2025

Unendliche Spiele $G(A)$ A Auszahlungsmenge / Gewinnmenge

↑

DETERMINIERT, falls I oder II eine GS hat

Frage: Wann ist $G(A)$ determiniert?

A: ⊛ AC $\Longrightarrow$ nicht alle A sind determiniert.

⊛ von Neumann – Endliche Spiele sind determiniert.

– Spiele mit endl. Horizont sind determiniert.

– [Gale-Stewart] Spiele mit halbendl. Horizont sind determiniert.

§6 Der Baire-Raum

Wir betrachten weiterhin $X^{\mathbb{N}}$.

X ist die Zugmenge.

wichtigste Bsp. $X = \{0,1\} = 2$

$X = \mathbb{N}$

[Im Prinzip kann X eine beliebige Menge mit $|X| \geq 2$ sein.]

Wir definieren auf $X^{\mathbb{N}}$ eine Abstandsfunktion

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 2^{-n} & \text{wobei } n = \min\{k;\ x(k) \neq y(k)\} \end{cases}$$

Das ist eine **Metrik**, also ist

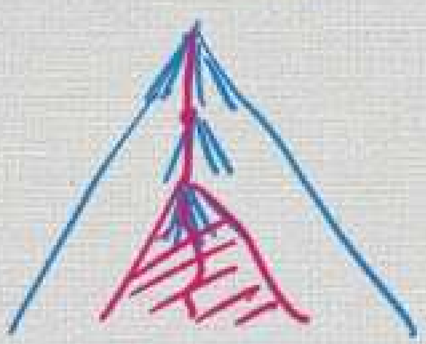
$(X^{\mathbb{N}}, d)$ ein **metrischer Raum**.

Dies gibt uns folgende Begriffe:

① ε-Kugeln

$$B_\varepsilon(x) := \{y;\ d(x,y) < \varepsilon\}$$

Bsp $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{y;\ y(0) = x(0) \wedge y(1) = x(1)\}$



$B_{\frac{1}{2}}(x)$

"Kugeln sind Kegel".

② Offene Menge:

A ist offen $:\Longleftrightarrow \forall x \in A\ \exists \varepsilon\ B_\varepsilon(x) \subseteq A$.

③ Konvergenz:

$x_n \longrightarrow x \ :\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \exists N \forall n > N\ d(x, x_n) < \varepsilon$

④ **Abgeschlossene Menge**

$\forall \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ und $x_n \longrightarrow x$, gilt $x \in A$.

⑤ **Dichte Menge**

$D \subseteq X^{\mathbb{N}}$ dicht $:\Longleftrightarrow \forall \varepsilon \forall x \exists d \in D\ d(x,d) < \varepsilon$.

Def. Falls $X = 2 = \{0,1\}$, so nennen wir $X^{\mathbb{N}}$ den Cantorraum.

Falls $X = \mathbb{N}$, so nennen wir $X^{\mathbb{N}}$ den Baireraum.

Sowohl im Cantor- als auch im Baireraum finden wir eine abz. dichte Teilmenge:

Sei $s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ und $s^*(k) := \begin{cases} s(k) & k < lh(s) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

sowie $D := \{ s^* ; s \in \mathbb{N}^{<\mathbb{N}} \}$

Klar ist: D ist abzählbar

D ist dicht

Metrische Räume mit abz. dichter TM heißen separabel.

Frage: Sind $2^{\mathbb{N}}$ oder $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ einfach nur Darstellungen von $\mathbb{R}$?

A: Nein

$P_0 := \{ x \in 2^{\mathbb{N}} ; x(0) = 0 \}$

$P_1 := \{ x \in 2^{\mathbb{N}} ; x(0) = 1 \}$

Beide offen, aber $P_0 \cup P_1 = 2^{\mathbb{N}}$

und $P_0 \cap P_1 = \emptyset$

Also ist $(2^{\mathbb{N}}, d)$ nicht zusammenhängend,

also nicht homöomorph zu $\mathbb{R}$.

isomorph

Ohne Beweis

Man kann zeigen

$$(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, d) \cong (\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}, d)$$

irrationale Zahlen

[Bemerkung: $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ ist nicht zsh., da $\{r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\ r<0\}$ und $\{r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q};\ r>0\}$ eine disjunkte Aufteilung in offene Mengen sind.

ZUSAMMENHANG MIT BÄUMEN

Falls $A \subseteq X^{\mathbb{N}}$, so definiere

$$T_A := \{p;\ \exists n \in \mathbb{N}\ \exists x \in A\ p = x\restriction n\}$$

Das ist ein Baum. Offensichtlich gilt:

$$A \subseteq [T_A].$$

Lemma $[T_A] = \overline{A}$

der Abschluß von A, also die Menge der x, so daß $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \subseteq A$ ex. mit $x_n \longrightarrow x$.

Beweis "$\subseteq$":

Sei $x \in [T_A]$.

D.h. für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x \upharpoonright n \in T_A$,

also ex. ein $x_n \in A$ mit $x \upharpoonright n = x_n \upharpoonright n \in T_A$.

Also gilt $x_n \longrightarrow x$. Somit $x \in \overline{A}$.

"$\supseteq$":

Falls $x \in \overline{A}$, so ex. $x_n \longrightarrow x$ mit $x_n \in A$ für alle n. Also finde ich für jedes k ein n_k mit

$$x_{n_k} \upharpoonright k = x \upharpoonright k.$$

$$\Longrightarrow x_{n_k} \upharpoonright k \in T_A \Longrightarrow x \upharpoonright k \in T_A.$$

Da k beliebig war, $x \in [T_A]$.

q.e.d.

Korollar BAUMDARSTELLUNG ABGESCHLOSSENER MENGEN

Eine Menge A ist abgeschlossen gdw ein Baum T existiert mit
$$A = [T].$$

Zurück zu den Spielen

EH I: Falls $x \in A$, so ex. n mit
$$\{y ; y \upharpoonright n = x \upharpoonright n\} \subseteq A.$$

EH II: Falls $x \notin A$, so ex. n mit
$$\{y ; y \upharpoonright n = x \upharpoonright n\} \cap A = \emptyset.$$

Halbendliches Horizont: ENTWEDER EH I oder EH II.

Korollar A hat halbendlichen Horizont gdw A entweder offen oder abgeschlossen ist.

Beweis Wir zeigen EH II $\Longleftrightarrow$ abgeschlossen.
[EH I $\Longleftrightarrow$ offen genauso]

Wir sagen p bezeugt EH II falls
$$\{y ; y \upharpoonright \mathrm{len}(p) = p\} \cap A = \emptyset$$

Beachte: falls $p \subseteq q$ & p bezeugt EH II, so q bezeugt EH II.

Daher ist

$$T := \{ p ; \; p \text{ bezeugt nicht EH } \underline{\text{II}} \}$$

ein Baum.

__Beh.__ $A = [T]$. [Nach früherem Korollar folgt also: A abg.]

[Falls $x \in A$, so gilt für alle n $x \restriction n$ bezeugt nicht EH $\underline{\text{II}}$. Also $x \restriction n \in T$ und somit $x \in [T]$.

Falls $x \in [T]$, so gilt für alle n $x \restriction n$ bezeugt nicht EH $\underline{\text{II}}$, also muß $x \in A$, weil EH $\underline{\text{II}}$ gilt.]

q.e.d.

Umformuliert:

Gale-Stewart sagt:

Alle offenen und alle abgeschlossenen Mengen sind determiniert.

§7 Ein Überblick über höhere Determiniertheitsbeweise

Offensichtlich gibt es viele Menge $A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, welche weder offen noch abgeschlossen sind.

[Nach der Baumdarstellung gibt es höchstens so viele abg. Mengen wie Bäume. Wieviele Bäume gibt es? $T \subseteq \underbrace{\mathbb{N}^{<\mathbb{N}}}_{\text{abzählbar}}$; also gibt es $2^{\aleph_0}$ viele Bäume. Aber $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ hat $2^{(2^{\aleph_0})}$ viele Teilmenge.]

Das kann man viel leichter sehen:

$$A := \{ x ; \ \exists n \forall k > n \ \ x(k) > 0 \}$$

$x \in A \iff x$ hat nur endlich viele Nullen.

Nicht offen. Es gilt für kein ε und x, daß $B_\varepsilon(x) \subseteq A$, weil jede ε-Kugel Elemente mit ∞ vielen Nullen enthält.

Nicht abgeschlossen. Betrachte $z(k) = 0 \ \forall k$.

Klar $z \notin A$.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere $z_n(k) := \begin{cases} 0 & k < n \\ 1 & k \geq n. \end{cases}$

Klar $z_n \in A$. Aber

$z_n \longrightarrow z$, also ist A nicht abgeschlossen.

Analysiere A genauer:

$$A := \{ x ; \exists n \forall k > n \ x(k) > 0 \}$$

Dann gilt $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ mit

$$A_n := \{ x ; \forall k > n \ x(k) > 0 \}$$

abgeschlossen

Also ist A eine abzählbare Vereinigung von abgeschlossenen Mengen, auch bekannt als F_σ-Mengen.

Wir haben, daß es F_σ-Mengen gibt, die weder offen noch abgeschlossen sind.

Frage. Sind alle F_σ-Mengen determiniert?

Komplemente von F_σ-Mengen sind G_δ-Mengen; abzählbare Vereinigungen von G_δ-Mengen bezeichnet man als $G_{\delta\sigma}$-Mengen. Deren Komplemente sind die $F_{\sigma\delta}$-Mengen; deren abz. Vereinigungen sind $F_{\sigma\delta\sigma}$-Mengen. Usw.

All diese Mengen sind Teil der Borel-σ-Algebra, bekannt aus der Maßtheorie, wo die Borelmengen die "guten" Mengen.

Man kann also fragen:

1. Sind alle F_σ-Mengen determiniert?
2. — $G_{\delta\sigma}$ —
3. — $F_{\sigma\delta\sigma}$ —

$\vdots$

∞. — Borel —

Historischer Überblick

Satz von Wolfe: F_σ ✓

Satz von Davis: $G_{\delta\sigma}$ ✓

Harvey Friedman 1970:

Es gibt nichttriviale mengentheoretische Annahmen (Axiome von ZFC, die üblicherweise nicht in der Mainstream-Mathematik verwendet werden), ohne die man $G_{\delta\sigma\delta\sigma}$-Determiniertheit nicht beweisen kann.

Diese Notwendigkeit von mengentheoretischen Annahmen gab einen Hinweis darauf, was man im Beweis verwenden muß.

$\rightsquigarrow$

<u>Theorem (1975)</u>

ZFC $\Longrightarrow$ Borel-Determiniertheit.

---

§8 Anwendungen, Teil I: Perfekte Mengeneigenschaft

Erinnerung: Bernsteinmenge A

[$\forall T$ perfekt $[T] \not\subseteq A$ und $[T] \cap A \neq \emptyset$]

Konstruiert vermittels AC.

Das impliziert, daß nichtdeterminierte Mengen existieren.

Zusammenhang mit CH — Kontinuumshypothese.

Falls $A \subseteq \mathbb{R}$ überabzählbar, so $|A| = |\mathbb{R}|$.

<u>PSP</u> <u>Perfekte Mengeneigenschaft</u>

$\forall A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ falls A überabzählbar, so ex. T perfekt $[T] \subseteq A$.

Falls PSP, so CH.

Aber: Bernsteinmengen sind ein Gegenbsp. zu PSP.

NÄCHSTE VORLESUNG (V): DO 22.5. 14–16 ZOOM