

Determiniertheit

VORLESUNG II

Donnerstag,
17. April 2025

Spiel $G(A)$ $\begin{matrix} \text{I} & x_0 & x_2 & & \\ \text{II} & & x_1 & x_3 & \dots \end{matrix} \rightarrow x$

$$A \subseteq X^{\mathbb{N}}$$

I gewinnt, falls $x \in A$

Strategien:

$$\sigma: X^{\mathbb{N}} \rightarrow X$$

gegeneinander spielen:

$$\sigma * \tau$$

Gewinnstrategie:

für I

$$\forall \tau \sigma * \tau \in A$$

für II

$$\forall \sigma \sigma * \tau \notin A$$

Strategischer Baum
(perfekt)

$$T_{\sigma}^{\text{I}}, T_{\sigma}^{\text{II}}$$

A heißt determiniert, falls entweder I oder II eine GS hat.

$$\sigma \text{ GS für I} \iff [T_{\sigma}^{\text{I}}] \subseteq A$$

$$\tau \text{ GS für II} \iff [T_{\tau}^{\text{II}}] \subseteq X^{\mathbb{N}} \setminus A.$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \text{Falls I GS hat, so } |A| \geq 2^{\aleph_0} \\ \text{Falls II GS hat, so } |X^{\mathbb{N}} \setminus A| \geq 2^{\aleph_0} \end{array}$$

Aussagen: A abzählbar $\Rightarrow$ II GS

$X^{\mathbb{N}} \setminus A$ abzählbar $\Rightarrow$ I GS.

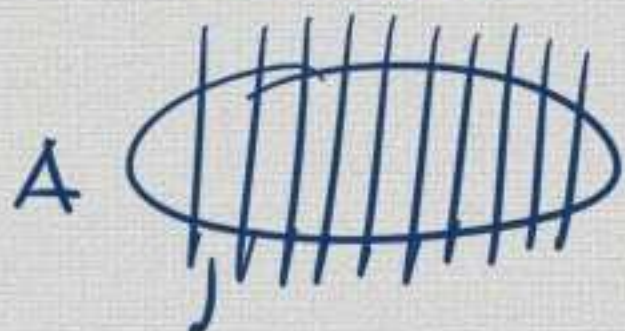
Proposition Falls $|A| < 2^{\aleph_0}$, so hat Spieler II
eine GS.

Beweis Für $z \in X^{\mathbb{N}}$, definiere

$$A_z := \{x \in A; (x)_n = z\}$$

Sicherlich: $A = \bigcup_{z \in X^{\mathbb{N}}} A_z$.

$$\text{und } z \neq z' \Rightarrow A_z \cap A_{z'} = \emptyset.$$



Dies sind $\geq 2^{\aleph_0}$ viele
Äquivalenzklassen auf
 A .

Da $|A| < 2^{\aleph_0}$, gilt nach dem Schubfach-
prinzip: es ex. z mit $A_z = \emptyset$.

Dann ist die Strategie mit verbundenen Augen
 τ_z eine GS für Spieler II.

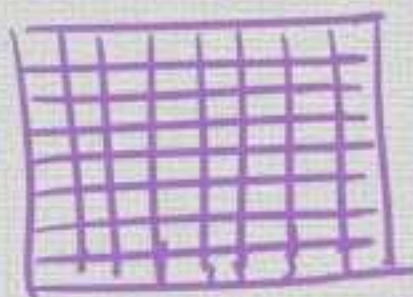
Gegen: Falls $|X^{\mathbb{N}} \setminus A| < 2^{\aleph_0}$, so hat Spieler I
eine GS. q.e.d.

Für jetzt nehmen wir an, daß $X = \mathbb{N}$. Insbesondere
 $X^{\mathbb{N}} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}; |X^{\mathbb{N}}| = 2^{\aleph_0}$.

Also muss jede nicht-determinierte Menge A die
Eigenschaften $|A| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A|$ haben.

Spiele mit Regeln

Bsp. Schach



$$8 \times 8 = 64$$

$$12 \quad \{B, D, K, L, S, T\} \times \{\text{schwarz, weiss}\}$$

+1 LEER

Schachposition: $\pi: 64 \rightarrow 13$

Also $N := 13^{64}$ Schachpositionen.

Also spielen wir auf N^N und
 $A \subseteq N^N$ mit $x \in A$ falls u ex. mit
 $x \upharpoonright u$ ist eine Schachmatt-
position für WEISS.

Zusätzlich legen die Regeln der Schach
fest, wann eine Schachposition k
ein LEGALER ZUG aus der Schachposition
 l ist.

Wir verbessern A wie folgt.

$T := \{p \in N^{<\mathbb{N}}; \text{ für alle } k < \text{Lg}(p)$
 $p(k) \text{ ein legaler Zug}$
 $\text{aus } p(k-1) \text{ ist} \}$

REGELBAUM

Definiere $A_T := \{x; x \in A \cap [T] \text{ oder } x \notin [T]$
und $\text{max}\{n; x \upharpoonright n \notin T\}$ ist
ungerade $\}$

Def. Dies heißt das Spiel mit Gewinnmenge A und Regelbaum T .

$$\longrightarrow G(A, T)$$

$G(A, T)$ und $G(A_T)$ sind
"äquivalent".

§ 2 Nicht-determinierte Mengen

Wir arbeiten hier mit $X = \mathbb{N}$.

Jedes muß eine nicht-det. Menge Kard. $2^{\aleph_0}$ haben.

BERNSTEIN - Konstruktion

Felix Bernstein

1878-1956

Wir wollen eine durch Ordinalzahlen $\alpha < 2^{\aleph_0}$ indizierte Folge $\vec{P} = \{P_\alpha; \alpha < 2^{\aleph_0}\}$ mit $P_\alpha \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ eine Bernsteinfolge nennen, falls

$$\forall \alpha \quad |P_\alpha| = 2^{\aleph_0}.$$

Wir nennen ein Paar $(A_{\vec{P}}, B_{\vec{P}})$

ein Bernsteinpaar für $\vec{P}$ [und $A_{\vec{P}}$ & $B_{\vec{P}}$ heißen Bernsteinmengen]

wenn

$$(1) \quad A_{\vec{P}} \cap B_{\vec{P}} = \emptyset$$

$$(2) \quad \forall \alpha < 2^{\aleph_0} \quad A_{\vec{P}} \cap P_\alpha \neq \emptyset \neq P_\alpha \cap B_{\vec{P}}.$$

Die Transkription verwendet bereits die Annahme, daß $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wohlgeordnet werden kann.

Theorem (Bernstein, ZFC)

Für jede Bernsteinfolge gibt es ein Bernsteinpaar.

Beweis Mit AC nehmen wir eine Auswahlfunktion

$$c: \mathcal{P}(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}) \longrightarrow \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$$

$$\text{so def } \forall A (A \neq \emptyset \Rightarrow c(A) \in A).$$

Konstruktion per transfinite Rekursion nach α .
Die Konstruktion wird die folgenden Induktionsbedingungen erfüllen:

$$\textcircled{1} A_\alpha \cap B_\alpha = \emptyset$$

$$\textcircled{2} |A_\alpha| = |\alpha| = |B_\alpha|.$$

Starte an mit $A_0 := B_0 := \emptyset$.

Seien A_α, B_α definiert mit Bed. $\textcircled{1}$ & $\textcircled{2}$.

Daher gilt $P_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha) \neq \emptyset$

$$a_\alpha := c(P_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha))$$

$$b_\alpha := c(P_\alpha \setminus (A_\alpha \cup B_\alpha \cup \{a_\alpha\}))$$

$$A_{\alpha+1} := A_\alpha \cup \{a_\alpha\}$$

$$B_{\alpha+1} := B_\alpha \cup \{b_\alpha\}$$

$\Rightarrow \textcircled{1} \& \textcircled{2}$ für $A_{\alpha+1}, B_{\alpha+1}$

Falls $\lambda < 2^{\aleph_0}$ Limitordinalzahl und A_α, B_α def. für $\alpha < \lambda$, so setze

$$A_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} A_\alpha; \quad B_\lambda := \bigcup_{\alpha < \lambda} B_\alpha.$$

Setze $A_{\vec{p}} := \bigcup_{\alpha < 2^{\aleph_0}} A_{\alpha}$

$B_{\vec{p}} := \bigcup_{\alpha < 2^{\aleph_0}} B_{\alpha}$.

Bek. $\forall \alpha \quad P_{\alpha} \cap A_{\vec{p}} \neq \emptyset \neq P_{\alpha} \cap B_{\vec{p}}$.

[In Schritt α der Konstruktion wurden $a_{\alpha}, b_{\alpha} \in P_{\alpha}$ gefunden und $a_{\alpha} \in A_{\alpha+1} \subseteq A_{\vec{p}}$
 $b_{\alpha} \in B_{\alpha+1} \subseteq B_{\vec{p}}$.]

q.e.d.

Anwendung - Wir sagen $P \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ perfekt falls
 ein perfekter Baum $T \subseteq \mathbb{N}^{<\mathbb{N}}$ ex.
 mit $P = [T]$.

Also: alle perfekten Mengen haben Kod.
 $2^{\aleph_0}$.

Sei $\mathcal{P}$ die Menge aller perfekten Mengen.

Dann gilt

$$|\mathcal{P}| \leq |\{T; T \text{ perfekt}\}| \leq |\{T; T \text{ Baum}\}| \\ \leq |\mathcal{P}(\mathbb{N}^{<\mathbb{N}})| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}.$$

Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ unendlich und T_A sei der Baum, bei
 dem jede Stufe n mit $n \in A$ voll verzweigt
 und $n \notin A$ nur der Nachfolger 0.

Die Abb. $A \mapsto [T_A]$ ist eine Injektion
 von der Menge aller unendl. TM von $\mathbb{N}$ nach $\mathcal{P}$.
 Also $2^{\aleph_0} \leq |\mathcal{P}|$.

Mit AC bilden wir also eine Bernsteinfolge

$$\mathcal{F} = \{P_\alpha; \alpha < 2^{\aleph_0}\}$$

aller perfekter Mengen.

Nach dem Satz von Bernstein ex. A mit

$$\forall \alpha \quad P_\alpha \cap A \neq \emptyset \quad \text{und}$$

$$P_\alpha \cap \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \setminus A \neq \emptyset.$$

Insbesondere ist $|A| = 2^{\aleph_0}$.

Historischer Hintergrund

Satz v. Cantor-Bendixson sagt

$\forall F \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ falls F abgeschl. + überabzählbar,
so ex. $P \subseteq F$, $P \neq \emptyset$ perfekt

Insbesondere:

$\forall F$ abg. $|F| \leq \aleph_0$ oder $|F| = 2^{\aleph_0}$

"abgeschlossene Kontinuumshypothese".

Hoffnung: Wenn man CB auf alle Mengen
ausweitet, so hat man CH bewiesen.

Satz v. Bernstein: Dies ist nicht möglich!

[Zumindest nicht in ZFC
mit AC!]

Korollar (ZFC)

Es gibt eine nicht-determinierbare Menge.

Beweis Man wähle eine $\vec{P}$ -Benennung
für die perfekten Mengen $\vec{P}$. Diese erfüllt
keine perfekte Menge (also auch keinen sta-
tischen Baum) und ihr Komplement auch
nicht. q.e.d.

Bemerkung MYCIEZSKY (Anfang der 1960er)
AD Axiom der Determiniertheit
" $\forall A \subseteq \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ $G(A)$ ist determiniert "

Nach obigem Korollar:

$$\text{ZFC} \vdash \neg \text{AD}.$$

Mycielski schlug vor, $\text{ZF} + \text{AD}$ zu untersuchen.

§ 3 Der Satz von von Neumann

Von Neumann bewies, daß endliche Spiele determiniert sind.

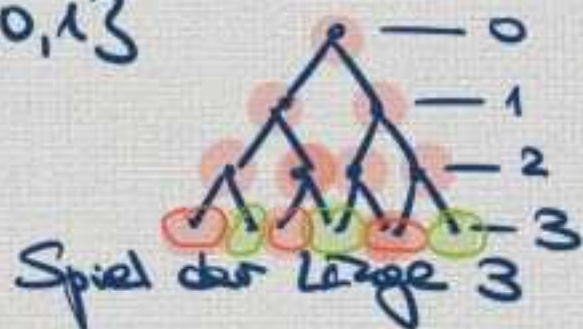
Wir betrachten endliche Spiele als unendliche Spiele, die an einer Stelle $m \in \mathbb{N}$ enden.

$$A \subseteq X^{\mathbb{N}}$$

$$X = \{0, 1\}$$

BACKWARDS INDUCTION

Wir färben die Positionen **ROT** und **GRÜN**.



Sei l eine partielle Färbung und p eine Position.

1. Falls $ln(p)$ gerade und

1a. ex x mit px ist **ROT**, so wird p auch **ROT** gefärbt.

1b. alle x mit px ist **GRÜN**, so wird p auch **GRÜN** gefärbt.

2. Falls $ln(p)$ ungerade und

2a. ex x mit px ist **GRÜN**, so wird p auch **GRÜN** gefärbt.

2b. alle x mit px ist **ROT**, so wird p auch **ROT** gefärbt.

Sei l^* die erweiterte Färbung.

Verwende folgende Rekursion:

l_0 sei die partielle Färbung der Positionen der Länge n ; **ROT** für $\emptyset$ von A ; **GRÜN** für die anderen.

Wende n -mal die $*$ -Operation an.

$$l_{i+n} := (l_i)^*$$

Dann gilt l_n eine Färbung ist, die total definiert ist (total).

Die Farbe der Wurzel sagt, wer gewinnt.

GS ist:

**BLEIBE AUF POSITIONEN
DEINER FARBE.**

Übung

Überprüfen Sie die Details:

- ① l_n ist total.
- ② Die GS ist ordentlich definiert.
- ③ Sie ist eine GS.