Studentische Lösungen zum Übungsblatt 9

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 9.1.

H9.1: Sei $\varkappa$ eine Ordinalzahl.

Beh: Es sind äquivalent:

i) $\forall \alpha < \varkappa \, \forall f : \alpha \to \varkappa$: f nicht bij.

ii) $\forall \alpha < \varkappa \, \forall f : \varkappa \to \alpha$: f nicht inj.

iii) $\forall \alpha < \varkappa \, \forall f : \alpha \to \varkappa$: f nicht surj.

Bew: iii) $\Rightarrow$ i) klar

i) $\Rightarrow$ ii): Gelte i).

Sei $\alpha < \varkappa$ und $f : \varkappa \to \alpha$ Fkt.

Da $\mathrm{Bild}(f) \subseteq \alpha$ wohlg. ex. β Ord.z. mit $\beta \cong \mathrm{Bild}(f)$.

Sei $\varphi : \beta \longrightarrow \mathrm{Bild}(f)$ ein Isom..

Nun $\beta \preceq \mathrm{Bild}(f) \preceq \alpha \Rightarrow \beta \preceq \alpha$

$\Rightarrow \beta \leq \alpha$

$\Rightarrow \beta < \varkappa$

Dann ist

$\varphi \circ \hat{f} : \varkappa \longrightarrow \beta$

surj., wobei $\hat{f} : \varkappa \to \mathrm{Bild}(f), x \mapsto f(x)$

Nach i) ist $\varphi \circ \hat{f}$ somit nicht inj.

Da φ Isom. ist dann $\hat{f}$ und somit f nicht inj.

ii) $\Rightarrow$ iii) : Gelte ii).

Ang. es ex. $\alpha < \varkappa$ und $f : \alpha \to \varkappa$ surj.

Def. $g : \varkappa \longrightarrow \alpha$

$$x \mapsto \min(\underbrace{\{a \in \alpha ; f(a) = x\}}_{\neq \emptyset \text{, da } f \text{ surj.}})$$

g ist inj.:

Seien $x, y \in \varkappa$ mit $g(x) = g(y)$. Dann $\min(\{a \in \alpha ; f(a) = x\}) = \min(\{a \in \alpha ; f(a) = y\})$

Es gilt $g(x) \in \{a \in \alpha ; f(a) = x\}$

$g(y) \in \{a \in \alpha ; f(a) = y\}$

Somit $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$ $\lightning$

$\square$

Hausaufgabe 9.2.

Behauptung. Jede Limeszahl ist Supremum einer Menge von Nachfolgerzahlen.

Beweis. Sei δ eine Limeszahl. Wir werden zeigen, dass δ das Supremum der Menge $M := \{S(\alpha) : \alpha \in \delta\}$ ist. Sei $\beta \in M$. Dann gibt es ein $\alpha \in \delta$ mit $S(\alpha) = \beta$. Da δ eine Limeszahl ist, gilt entweder $\beta \in \delta$ oder $\delta \in \beta$. Angenommen $\delta \in \beta$. Dann gilt

$$\delta \in \beta = S(\alpha) = \alpha \cup \{\alpha\}$$

uns so ist $\delta = \beta$. Aber das kann nicht sein. Also muss $\beta \in \delta$ gelten und so ist δ eine obere Schranke von M. Sei nun $\alpha \in \delta$. Dann ist $\alpha + 1 \in M$ und so ist α keine obere Schranke. Also ist δ das Supremum von M. $\square$

Behauptung. Es gibt eine Limeszahl δ, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \delta$ ist.

Beweis. Sei λ eine Limeszahl, $\delta = \omega \cdot \lambda$ und $M_\lambda := \{\omega \cdot \xi : \xi \in \lambda \text{ und } \xi > 0\}$. Dann gilt nach Definition $\delta = \bigcup M_\lambda$. Also ist δ das Supremum der Menge M_λ. Wir zeigen nun, dass für alle Ordinalzahlen $\alpha > 0$, $\omega \cdot \alpha$ eine Limeszahl ist. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: α ist eine Nachfolgerzahl. Sei β der Vorgänger von α. Dann gilt

$$\omega \cdot \alpha = \omega \cdot (\beta + 1) = \omega \cdot \beta + \omega = \bigcup \{\omega \cdot \beta + n : n \in \omega\}.$$

Angenommen $\omega \cdot \alpha = \gamma + 1$. Dann gibt es ein $n \in \omega$ mit $\gamma \in \omega \cdot \beta + n$ und so gilt

$$\gamma + 1 \in (\omega \cdot \beta + n) + 1 = \omega \cdot \beta + (n + 1) \subseteq \omega \cdot \alpha.$$

Aber das ist ein Widerspruch. Also ist $\omega \cdot \alpha$ eine Limeszahl.

Fall 2: α ist eine Limeszahl. Dann gilt $\omega \cdot \alpha = \bigcup M_\alpha$. Angenommen $\omega \cdot \alpha = \beta + 1$. Dann gilt $\beta \in \omega \cdot \alpha$. Also gibt es ein $n \in \omega$ mit $\beta \in \omega \cdot n$ und so gilt

$$S(\beta) < S(\omega \cdot n) < \omega \cdot n + \omega = \omega \cdot (n+1) \subseteq \omega \cdot \alpha.$$

Aber das ist ein Widerspruch.

Also gilt für jede Ordinalzahl $\alpha > 0$, dass $\omega \cdot \alpha$ eine Limeszahl ist, die das Supremum einer Menge von Limeszahlen $< \omega \cdot \alpha$ ist. Insbesondere gilt dies auch für $\alpha = \omega$. $\square$

Behauptung. Die Limeszahlen bilden keine Menge.

Beweis. Angenommen die Limeszahlen würden eine Menge bilden. Sei M diese Menge. Dann ist auch $\bigcup M$ eine Menge. Es reicht zu zeigen, dass es für alle Ordinalzahlen α eine Limeszahl δ gibt die größer als α ist. Denn dann würde $\bigcup M$ alle Ordinalzahlen enthalten und das kann nicht sein. Sei also α eine Ordinalzahl. Wir definieren rekursiv eine Funktion auf ω durch

$$f(0) := \alpha \text{ und } f(i+1) := f(i) + 1.$$

Nach Ers ist $M := \{f(i) : i \in \omega\}$ eine Menge von Ordinalzahlen. Somit ist auch $\bigcup M$ eine Menge von Ordinalzahlen. Sei $\beta \in \bigcup M$ und $\gamma \in \beta$. Dann gibt es ein $i \in \omega$ mit $\beta \in f(i)$ und so gilt auch $\gamma \in f(i)$. Also ist $\bigcup M$ eine transitive Menge von Ordinalzahlen und somit eine Ordinalzahl. Wir setzen $\beta := \bigcup M$. Dann gilt $\alpha \in \beta$. Angenommen β wäre eine Nachfolgerzahl mit $\beta = \gamma + 1$. Es gilt $\gamma \in \beta$ und so gibt es ein $i \in \omega$ mit $\gamma \in f(i)$. Dann gilt $\gamma + 1 \in f(i) + 1 = f(i+1) \subseteq \beta$. Aber das kann nicht sein. Also ist β eine Limeszahl größer als α. $\square$

Hausaufgabe 9.3.

Behauptung. Ist α beschränkt rational und $\beta \leq \alpha$, so ist β beschränkt rational.

Beweis. Seien $q, q^* \in \mathbb{Q}$ und f eine ordnungserhaltende Einbettung von α in $(q, q^*) \cap \mathbb{Q}$. Dann ist auch $f{\restriction}\beta$ eine ordnungserhaltende Einbettung von β in $(q, q^*) \cap \mathbb{Q}$. $\square$

Behauptung. Ist α beschränkt rational, so ist $\alpha + 1$ beschränkt rational.

Beweis. Seien $q, q^* \in \mathbb{Q}$ und f eine ordnungserhaltende Einbettung von α in $(q, q^*) \cap \mathbb{Q}$. Wir definieren $g : \alpha + 1 \to (q, q^* + 1) \cap \mathbb{Q}$ durch

$$\beta \mapsto \begin{cases} f(\beta) & \beta \in \alpha, \\ q^* & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist g eine ordnungserhaltende Einbettung von $\alpha + 1$ in $(q, q^* + 1) \cap \mathbb{Q}$. $\square$

Behauptung. Ist $\alpha = \bigcup_{n \in \omega} \alpha_n$, wobei jedes α_n beschränkt rational ist, bezeugt durch eine Einbettung $f_n : \alpha_n \to \mathbb{Q}$, dann ist α beschränkt rational.

Beweis. Sei $q_0 := 0$ und $q_{n+1} := q_0 + \frac{1}{2^n}$. Dann ist q_n eine streng monoton wachsende folge rationaler Zahlen mit Limes 1. Da je zwei offene Intervalle rationaler Zahlen zueinander ordnungsisomorph sind, können wir oBdA. annehmen, dass $f_n : \alpha_n \to (q_n, q_{n+1}) \cap \mathbb{Q}$. Sei nun $\beta_n := \bigcup_{i \in n} \alpha_i$. Wir definieren

$$f := \bigcup \{ f_n{\restriction}(\alpha_n \backslash \beta_n) : n \in \omega \}.$$

Sei $\gamma \in \alpha$ und sei n minimal mit $\gamma \in \alpha_n$. Dann gilt $\gamma \in \alpha_i \backslash \beta_i$ genau, dann wenn $i = n$. Also ist f eine Funktion von α nach $(0,1) \cap \mathbb{Q}$, die $\gamma \in \alpha$ auf $f_n(\gamma)$ abbildet, wobei n minimal mit $\gamma \in \alpha_n$ ist. Weiter ist f nach Definition injektiv. Es bleibt zu zeigen, dass f ordnungserhaltend ist. Seien $\gamma, \gamma' \in \alpha$ mit $\gamma < \gamma'$. Sei n minimal mit $\gamma \in \alpha_n$ und n' minimal mit $\gamma' \in \alpha_{n'}$. Dann gilt $n \leq n'$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $n = n'$. Dann gilt

$$f(\gamma) = f_n(\gamma) < f_n(\gamma') = f_{n'}(\gamma') = f(\gamma'),$$

da f_n ordnungserhaltend ist.

Fall 2: $n < n'$. Dann gilt

$$f(\gamma) = f_n(\gamma) < q_{n+1} \leq q_{n'} < f_{n'}(\gamma') = f(\gamma'),$$

nach Wahl der q_i.

Also ist f eine ordnungserhaltende Einbettung von α in $(0,1) \cap \mathbb{Q}$. $\square$