Studentische Lösungen zum Übungsblatt 8

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 8.1.

Behauptung. Das Links-Distributivgesetz gilt auf den natürlichen Zahlen.

Beweis. Sei

$$Z := \{k \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}\ n \cdot (m + k) = n \cdot m + n \cdot k\} \subseteq \mathbb{N}.$$

Wir zeigen, dass Z induktiv ist. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$n \cdot (m + 0) = n \cdot m = n \cdot m + 0 = n \cdot m + n \cdot 0.$$

Somit gilt $0 \in Z$. Sei nun $k \in Z$. Dann gilt

$$n \cdot (m + S(k)) = n \cdot S(m + k) = n \cdot (m + k) + n.$$

Da $k \in Z$, gilt

$$n \cdot (m + k) + n = (n \cdot m + n \cdot k) + n = n \cdot m + (n \cdot k + n) = n \cdot m + n \cdot S(k).$$

Also ist $S(k) \in Z$ und somit ist Z induktiv. □

Dieser Beweis benutzt außer der Definitionen von $+$ und $\cdot$ nur noch das Assoziativgesetz für $+$. Wir wollen jetzt versuchen mit dem gleichen Beweis das Rechts-Distributivgesetz zu zeigen. Dann gibt es zwei verschiedene Möglichkeiten wie wir Z definieren könnten, nämlich

$$Z_1 := \{k \in \mathbb{N} : \forall n, m \in \mathbb{N}\ (n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k\} \text{ oder}$$
$$Z_2 := \{m \in \mathbb{N} : \forall k, n \in \mathbb{N}\ (n + m) \cdot k = n \cdot k + m \cdot k\}.$$

Wir betrachten zunächst Z_1. Seien $n, m \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$(n + m) \cdot 0 = 0 = 0 + 0 = n \cdot 0 + m \cdot 0$$

und so $0 \in Z_1$. Sei nun $k \in Z$. Dann gilt

$$(n + m) \cdot S(k) = (n + m) \cdot k + (n + m).$$

Da $k \in Z_1$, gilt

$$(n + m) \cdot k + (n + m) = (n \cdot k + m \cdot k) + (n + m).$$

An dieser Stelle harkt nun der Beweis. Aber wenn wir zusätzlich noch das Kommutativgesetz für $+$ annehmen gilt

$$(n \cdot k + m \cdot k) + (n + m) = (n \cdot k + n) + (m \cdot k + m) = n \cdot S(k) + m \cdot S(k).$$

Somit gilt $S(k) \in Z_1$ und so ist Z_1 induktiv.

Wir betrachten nun Z_2. Seien $k, n \in \mathbb{N}$ beliebig. Es gilt

$$(n + 0) \cdot k = n \cdot k = n \cdot k + 0 = n \cdot k + 0 \cdot m.$$

Somit ist $0 \in Z_2$. Hier haben zusätzlich benutzt, dass $0 \cdot a = 0$ für alle $a \in \mathbb{N}$ gilt. Sei nun $k \in Z_2$. Dann gilt

$$(n + S(m)) \cdot k = S(n + m) \cdot k.$$

An dieser Stelle harkt nun der Beweis. Wenn wir nun zusätzlich annehmen, dass für alle $a, b \in \mathbb{N}$ gilt, dass $S(a) \cdot b = a \cdot b + b$, dann gilt

$$S(n+m) \cdot k = (n+m) \cdot k + k.$$

Da $m \in Z_2$, gilt

$$(n+m) \cdot k + k = (n \cdot k + m \cdot k) + k = n \cdot k + (m \cdot k + k) = n \cdot k + S(m) \cdot k.$$

Somit gilt $S(k) \in Z_2$ und so ist Z_2 induktiv. Beide Annahmen die wir für diesen Beweis getroffen haben folgen direkt aus dem Kommutativgesetz für $\cdot$. Beide Kommutativgesetze auf den natürlichen Zahlen können per Induktion bewiesen werden.

Hausaufgabe 8.2.

Sei $\omega := (W, <)$ eine Wohlordnung und Z eine beliebige Menge,

$G(\omega, Z)$ alle Funktionen g, sodass $Bild(g) \subseteq Z$ und $Def(g)$ ein echtes Anfangsstück von ω ist und

$F : G(\omega, Z) \rightarrow Z$ beliebig.

Beh: Es gibt eine eindeutig bestimmte Funktion $H : W \rightarrow Z$, sodass für alle $w \in W$ gilt, dass

$$H(w) = F(H \restriction <[w])$$

Definiere: Eine Funktion g heißt Anfang gdw. $Def(g)$ ist AS von W bzgl. $<$

$\wedge \; \forall x (x \in Def(g) \rightarrow g(x) = F(g \restriction <[x]))$

Beh1: h, g Anfänge $\wedge$ $u \in Def(h) \cap Def(g) \Rightarrow h(u) = g(u)$

Angenommen $u \in Def(h) \cap Def(g)$ und $h(u) \neq g(u)$. Dann ist $<[u] \subseteq Def(h) \cap Def(g)$.

Da auf ω das Prinzip des kleinsten Elements gilt, können wir u minimal bzgl. $<$ annehmen, sodass $h \restriction <[u] = g \restriction <[u]$.

Wir erhalten weiter:

$$h(u) = F(h \restriction <[u]) = F(g \restriction <[u]) = g(u) \quad \lightning \, (h(u) \neq g(u)) \lrcorner$$

Somit kann es maximal eine Funktion $g : W \rightarrow Z$ geben, welche die Bedingungen der Behauptung erfüllt.

Beh2: Es existiert eine solche Funktion

Sei $b := \{u \in W \,;\, u \in Def(g) \text{ eines Anfangs } g\}$

b ist ein AS, da wenn $u \in Def(g)$, dann $<[u] \subseteq Def(g)$. Also $x \in <[u] \Rightarrow x \in Def(g)$.

Definiere $f : W \rightarrow Z$ durch

$$f(u) := \begin{cases} g(u) & u \in b \text{ und } g \text{ ist ein Anfang mit } u \in Def(g) \\ \emptyset & u \notin b \end{cases}$$

H ist nach Beh 1 wohldefiniert. Setze $H := f \upharpoonright b$

zz H ist Anfang

⌈ Es gilt $Def(H) = b$ ist ein AS von W bzgl. $<$. Also ist $u \in b$ und g ein Anfang mit $u \in Def(g)$. Somit gilt $H(u) = g(u) = F(g \upharpoonright <[u]) = F(H \upharpoonright <[u])$ ⌋

zz $Def(H) = W$

⌈ Betrachte $W \setminus b$. Wäre $W \setminus b \neq \emptyset$, so wäre für ein minimales $u \in W \setminus b$ die Funktion $h := H \cup \{(u, F(H \upharpoonright <[u]))\}$ ein Anfang. Also $u \in b$ $\lightning (u \in W \setminus b)$ ⌋

⌋

Hausaufgabe 8.3.

Beh: Sei (a, r) eine Wohlordn., A die Menge der echten AS von a bzgl. r.
Dann ist
$\varphi : (a, r) \to (A, \subset_A), x \mapsto r[x]$
ein Isomorphismus.

Bew:

inj.: $x, y \in a, x \neq y \Rightarrow xry \vee yrx$
oE: $xry \Rightarrow y \notin r[x]$
$\Rightarrow r[x] \neq r[y]$

surj.: Sei $\alpha \in A$, also $\alpha \subseteq a$ echtes AS
dann ex. $x \in a$ mit $\alpha = r[x]$, da (a, r) Wohlordn. und somit
$\varphi(x) = r[x] = \alpha$

Ordnerh.: Seien $x, y \in a$ mit xry
$xry \Rightarrow y \notin r[x] \Rightarrow r[x] \subset_A r[y]$

$\square$

$(a, r) = (\mathbb{Z}, <)$, dann hat $(A, <_A)$ ein minimales Element, $(\mathbb{Z}, <)$ hat jedoch kein minimales Element.