Studentische Lösungen zum Übungsblatt 7

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 7.1.

a) $Z = \{ m \in \mathbb{N} \mid n \sqcup m$ hat eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ $k \cong n \sqcup m \ \forall n \in \mathbb{N} \}$

IA $m = 0$ dann betrachte $k = n$
und definiere $f: s(n) = k \to n \sqcup 0 \quad \ell \mapsto \ell$ da $0 = \emptyset \quad n \sqcup \emptyset = n$
$\Rightarrow$ also ex. $k \in \mathbb{N}$ dass $k \cong n \sqcup 0$
Angenommen es ex. $\tilde{k}$ mit $\tilde{k} \cong n \sqcup 0$
Dann $\tilde{k} \cong n \sqcup 0 \cong k \Rightarrow \tilde{k} \cong k \Rightarrow \tilde{k} = k$ $\}$ $(*)$
$\Rightarrow k$ ist eindeutig bestimmt $\Rightarrow 0 \in Z$

IS angenommen $m \in Z$ zz $s(m) \in Z$
Dann betrachte $s(k)$ mit $k \cong n \sqcup m$
Da $m \in Z$ gibt es $g: k \to n \sqcup m$ bijektion
Betrachte $f: s(k) \to n \sqcup s(m) \quad \ell \mapsto \begin{cases} g(\ell) & \ell \in n \sqcup m \\ k & \ell = m \end{cases}$
$\Rightarrow f$ ist bijektion
Analog wie oben ist $s(k)$ eindeutig
Argument $(*)$
$\Rightarrow s(m) \in Z \qquad \Rightarrow Z = \mathbb{N}$

b) $Z = \{ m \in \mathbb{N} \mid$ es gibt eindeutiges $k \in \mathbb{N}$ mit $k \cong n \times m \ \forall n \in \mathbb{N} \}$

IA $m = 0$ dann betrachte $k = 0$ und $f: \emptyset \to n \times \emptyset = \emptyset$
dann ist $0 \cong n \times 0$ da $n \times \emptyset = \emptyset$
$k = 0$ eindeutig da wenn $\tilde{k}$ ist $n \times 0$
dann gilt $\tilde{k} \cong n \times 0 \cong k \Rightarrow \tilde{k} \cong k \Rightarrow k = \tilde{k}$ $\}$ $*$
$\Rightarrow 0 \in Z$

IS sei $m \in Z$ zz $s(m) \in Z$
Dann gibt es $\tilde{k} \cong n \times m$ und $g: \tilde{k} \to n \times m$ bijektion
und setze $k = \tilde{k} + n$
und $f: k \to n \times s(m) \qquad i \mapsto \begin{cases} g(i) & i \in \tilde{k} \\ (i - \tilde{k}, m) & i \notin \tilde{k} \end{cases}$
dann ist f bijektion wobei $i - \tilde{k} := \begin{cases} 0 & \text{wenn } i = \tilde{k} \\ s(i - \tilde{k}) = s(i) - \tilde{k} \end{cases}$ $\Big\{$ wohl defi da $i \geq \tilde{k}$
da g eine ist und $\# \, n \times s(m) = n \cdot s(m) = k$
und k eindeutig da $*$
$\Rightarrow s(m) \in Z$

$\Rightarrow Z = \mathbb{N}$

Hausaufgabe 7.2.

i) zZ. es gilt unter H7.1 $\quad n+m = n \boxplus m$

Sei $Z = \{ m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad n+m = n \boxplus m \}$.

IA $\quad m = 0$

$$n+m = n + 0 \overset{\text{defi}}{=} n \overset{\text{No 1}}{=} n \boxplus 0 = n \boxplus m$$

$\Rightarrow$ Die Aussage gilt $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow 0 \in Z$

IS $\quad m \in Z$

$$n + s(m) \underset{\text{defi}}{=} s(n+m) \underset{m \in Z}{=} s(n \boxplus m) \underset{\text{No1}}{=} n \boxplus s(m)$$

$\Rightarrow Z = \mathbb{N}$

ii) zZ. es gilt unter H7.1 $\quad n \cdot m = n \boxtimes m$

Sei $Z = \{ m \in \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad n \cdot m = n \boxtimes m \}$.

IA $\quad m = 0$

$$n \cdot m = n \cdot 0 \underset{\substack{\text{VL+} \\ \text{defi}}}{=} 0 \overset{\text{No1}}{=} n \boxtimes 0 = n \boxtimes m$$

$\Rightarrow$ Die Aussage gilt $\forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow 0 \in Z$

IS $\quad m \in Z$

zZ. $\quad s(m) \subset Z$

$$n \cdot s(m) \underset{\text{defi}}{=} n \cdot m + n \underset{m \in Z}{=} n \boxtimes m + n \underset{\text{No1}}{=} n \boxtimes s(m)$$

$\Rightarrow s(m) \in Z \qquad \Rightarrow Z = \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 7.3.
(a)

Behauptung. $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ ist eine strikte totale Ordnung, in der jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat.

Beweis. Irreflexiv: Sei $(L, R) \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$. Dann kann $(L, R) \not< (L, R)$ nicht gelten, da sonst L eine echte Teilmenge von sich selbst wäre.

Transitiv: Seien $(L_1, R_1), (L_2, R_2), (L_3, R_3) \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ mit $(L_1, R_1) < (L_2, R_2)$ und $(L_2, R_2) < (L_3, R_3)$. Dann ist $L_1 \subsetneqq L_2$ und $L_2 \subsetneqq L_3$. Somit ist auch $L_1 \subsetneqq L_3$ und so gilt $(L_1, R_1) < (L_3, R_3)$.

Konnex: Seien $(L, R), (L', R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$. Falls $L = L'$ ist, so gilt $(L, R) = (L', R')$. Also können wir annehmen, dass $L \neq L'$ ist. Da L und L' Anfangsstücke von $\mathfrak{X}$ sind, gilt entweder $L \subsetneqq L'$ oder $L' \subsetneqq L$. Somit gilt entweder $(L, R) < (L', R')$ oder $(L', R') < (L, R)$.

Es bleibt zu zeigen, dass jede nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge eine kleinste obere Schranke hat. Sei $A \subseteq \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ eine nicht-leere nach oben beschränkte Teilmenge. Wir betrachten

$$L := \{x \in X : \exists D(D \in A \rightarrow \exists L', R'(D = (L', R') \wedge x \in L'))\} \text{ und } R := X \setminus L.$$

Wir werden zeigen, dass (L, R) die kleinste obere Schranke von A ist. Dazu zeigen wir zunächst, dass (L, R) ein adäquater Dedekind-Schnitt ist. Nach Definition ist $L \cup R = X$ und $L \cap R = \emptyset$. Sei $l \in L$ und $x \in X$ mit $x < l$. Dann gibt es ein $D \in A$ sodass $D = (L', R')$ und $l \in L'$ gelten. Da L' ein Anfangsstück ist gilt auch $x \in L'$ und so ist $x \in L$. Also ist L ein Anfangsstück von X und so ist R, nach Definition, ein Endstück von X. Sei $(L', R') \in A$ beliebig. Dann ist $L' \neq \emptyset$ und so $\emptyset \neq L' \subseteq L$. Somit ist R ein echtes Endstück. Da A nach oben beschränkt ist, gibt es ein $(L', R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ sodass $(L'', R'') < (L', R')$ für alle $(L'', R'') \in A$. Sei $r \in R''$. Dann gilt $r \notin L''$ für alle $(L'', R'') \in A$ und so $r \notin L$. Also ist L ein echtes Anfangsstück. Es bleibt zu zeigen, dass (L, R) adäquat ist. Angenommen L hätte ein größtes Element $l \in L$. Dann gibt es ein $(L', R') \in A$ mit $l \notin L'$ und so ist l auch ein größtes Element von L', da $L' \subseteq L$ ist. Aber das ist ein Widerspruch zur Adäquatheit von (L', R'). Also ist auch (L, R) adäquat. Somit gilt $(L, R) \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$.

Nach Definition ist L eine obere Schranke. Sei $(L', R') \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$ eine andere obere Schranke und sei $l \in L$. Dann gibt es ein $(L'', R'') \in A$ sodass $l \in L''$ gilt. Da $(L'', R'') < (L', R')$, gilt $l \in L'' \subseteq L'$. Also gilt $(L, R) \leq (L', R')$. $\square$

(b)

Behauptung. Sei $\mathfrak{X} = (X, <)$ eine dichte strikte lineare Ordnung ohne kleinstes Element und sei $f : \mathfrak{X} \rightarrow (\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ die Abbildung

$$x \mapsto (\{y \in X : y < x\}, \{y \in X : x \leq y\}).$$

Dann ist f eine ordnungserhaltende Einbettung.

Beweis. Wir zeigen als erstes, dass f wohldefiniert ist. Sei $x \in X$ und $(L, R) = (\{y \in X : y < x\}, \{y \in X : x \leq y\})$. Dann ist L ein Anfangsstück und R ein Endstück. Da $x \in R$ ist, ist L sogar ein echtes Anfangsstück. Weiter hat $\mathfrak{X}$ kein kleinstes Element. Also gibt es ein $x' \in X$ mit $x' < x$. Dann ist $x' \in L$ und so ist R ein echtes Endstück. Angenommen L hätte ein größtes Element $l \in L$. Dann ist $l < x$ und es gibt kein $x' \in X$ mit $l < x' < x$. Aber das ist ein Widerspruch zur Dichtheit von $\mathfrak{X}$. Also gilt $f(x) \in \mathrm{Ded}(\mathfrak{X})$.

Seien nun $x, x' \in X$ mit $x < x'$. Dann gilt $\{y \in X : y < x\} \subsetneqq \{y \in X : y < x'\}$. Somit ist $f(x) < f(x')$ und so ist f ordnungserhaltend und injektiv. $\square$

Die beiden Bedingungen sind nicht nur hinreichend sondern auch notwendig. Betrachte $\mathfrak{X}_1 := (\mathbb{Z}, <)$ und $\mathfrak{X}_2 := (\mathbb{Q}_{\geq 0}, <)$. Für $\mathfrak{X}_1$ ist $f(1) \notin \mathrm{Ded}(\mathfrak{X}_1)$, da 0 das größte Element von $\{y \in \mathbb{Z} : y < 1\}$ ist. Für $\mathfrak{X}_2$ ist $f(0) \notin \mathrm{Ded}(\mathfrak{X}_2)$, da $\{y \in \mathbb{Q}_{\geq 0} : y < 0\}$ leer ist.

(c)

Wenn wir die Adäquatheit weglassen, haben wir für jedes $x \in X$ zwei verschiedene Dedekind-Schnitte. Beispielsweise sei $\mathfrak{X} = (\mathbb{Q}, <)$ und $q \in \mathbb{Q}$. Dann sind $(L, R) := (\{p \in \mathbb{Q} : p < q\}, \{p \in \mathbb{Q} : q \leq p\})$ und $(L, R) := (\{p \in \mathbb{Q} : p \leq q\}, \{p \in \mathbb{Q} : q < p\})$ Dedekind-Schnitte die sich genau um q unterschieden. Das heißt, dass es keinen Dedekind-Schnitt D geben kann mit $(L, R) < D < (L', R')$. Also ist $(\mathrm{Ded}(\mathfrak{X}), <)$ nicht dicht und so insbesondere nicht ordnungsisomorph zu den reellen Zahlen (die aus der Konstruktion mit adäquaten Dedekind-Schnitten erhält).