Studentische Lösungen zum Übungsblatt 6

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 6.1.

~~Aa~~ Seien (a,r) und (b,s) Ordnungen im Sinne von $<$.
~~kleiner~~

Behauptung: $(a \cup b,\ s \cup r \cup (a \times b))$ ist eine Ordnung im Sinne von $<$.

Beweis:

- irreflexiv

Sei $x \in a \cup b$ beliebig

o.B.d.A. $x \in a$

· da r eine Ordnung im Sinne von $<$, gilt
$(x,x) \notin r$.

· da a und b disjunkt sind und s eine Ordnung über b, folgt $(x,x) \notin s$ und $(x,x) \notin a \times b$.

- transitiv

Seien $u,v,w \in a \cup b$ mit utv und vtw.

$\Rightarrow (u,v) \in t$ und $(v,w) \in t$

Fall 1: $(u,v),(v,w) \in r$

Da r eine Ordnung ~~im Sinne~~ ist folgt $(u,w) \in r$

$\Rightarrow (u,w) \in t$

(Analog $(u,v),(v,w) \in s$)

Fall 2: $(u,v) \in r$ und $(v,w) \in s$

Dieser Fall tritt nicht ein, da sonst $v \in a$ und $v \in b$.

a und b sind aber disjunkt

(Analog $(v,w) \in s$ und $(u,v) \in r$)

(Analog $(u,v),(v,w) \in a \times b$)

<u>Fall 3:</u> $(u,v) \in r$ und $(v,w) \in a \times b$

dann gilt $u \in a$ und $w \in b$ und somit

$(u,w) \in a \times b \Rightarrow (u,w) \in t$

(Analog $(v,w) \in s$ $(u,v) \in a \times b$

~~$(u,w) \in s$ t~~

<u>Fall 4:</u> ~~Ang~~ $(u,v) \in s$ und $(v,w) \in a \times b$

Dann gilt $v \in b$ wegen $(u,v) \in s$ aber auch

$v \in a$ wegen $(v,w) \in a \times b$.

↯ a und b sind disjunkt.

(Analog für $(v,w) \in r$ $(u,v) \in a \times b$.

<u>Konnex über $a \cup b$</u>

Seien $x,y \in a \cup b$ beliebig.

~~A~~ Nehme an $x \neq y$, denn ansonsten ist konnex trivialerweise erfüllt.

<u>Fall 1:</u> $x,y \in a$

• Da r eine Ordnung über a ist, gilt $(x,y) \in r$ oder $(y,x) \in r$.

(Analog gilt der Fall $x,y \in b$) $\Rightarrow$ $(x,y) \in t$ oder $(y,x) \in t$.

<u>Fall 2:</u> $x \in a$ und $y \in b$

Dann gilt $(x,y) \in a \times b \Rightarrow (x,y) \in t$

<u>Fall 3:</u> $x \in b$ und $y \in a$

Dann gilt $(y,x) \in a \times b \Rightarrow (y,x) \in t$.

Es sei $(I, <)$ eine Ordnung i.S.v. $<$ mit $I \neq \emptyset$.

Es sei $(X_i)_{i \in I} = ((x_i, r_i))_{i \in I}$ eine Familie von Ordnungen i.S.v. $<$

<u>Behauptung</u>: $X := \left(\bigcup_{i \in I} x_i \,,\, \bigcup_{i \in I} r_i \cup \bigcup_{i < j} x_i \times x_j \right) =: (x, r)$ ist eine Ordnung i.S.v. $<$.

<u>Beweis</u>:

<u>irreflexiv</u>:

Sei $y \in \bigcup_{i \in I} x_i$. Da die x_i paarweise disjunkt, gibt es genau ein $j \in I$ mit $y \in x_j$.

$\Rightarrow$ $y \notin x_i$ falls $i \neq j$

$\Rightarrow$ $(y, y) \notin r_i$ falls $i \neq j$ und $(y, y) \notin x_i \times x_j$ für alle $i < j$

weil ~~X_j~~ r_j eine Ordnung i.S.v $<$ ist gilt auch $(y, y) \notin r_j$. Somit ist X irreflexiv.

<u>transitiv</u>:

Seien $(u, v) \in r$ und $(v, w) \in r$, dann sind folgende Fälle möglich.

- $(u, v), (v, w) \in r_i$ für ein $i \in I$
- $(u, v) \in r_i$ und $(v, w) \in x_i \times x_j$ für $i, j \in I$ mit $i < j$
- $(u, v) \in x_i \times x_j$ und $(v, w) \in r_j$ für $i, j \in I$ und $i < j$.
- $(u, v) \in x_i \times x_j$ und $(v, w) \in x_j \times x_k$ für $i, j, k \in I$ mit $i < j < k$.

Da die x_i paarweise disjunkt sind, sind folgende Fälle nicht möglich:

- $(u, v) \in r_i$ und $(v, w) \in r_j$ für $i, j \in I$ mit $i \neq j$

- $(u,v) \in x_i \times x_j$ und $(v,w) \in x_k \times x_l$ für $i,j,k,l \in I$ mit $j \neq k$.
- $(u,v) \in r_i$ und $(v,w) \in x_j \times x_k$ für $i,j,k \in I$ mit $i \neq j$
- $(u,v) \in x_i \times x_j$ und $(v,w) \in r_k$ für $i,j,k \in I$ mit $j \neq k$.

Aus den möglichen Fällen folgt analog zum Beweis von der vorherigen Aufgabe, dass $(u,w) \in r$ ist.

<u>konnex</u>:

Seien $y, y' \in x$ beliebig.

Nehme an $y \neq y'$, dann gilt einer der folgenden drei Fälle:

- $y, y' \in x_i$ für $i \in I$
- $y \in x_i$ und $y' \in x_j$ für $i,j \in I$ mit $i < j$
- $y \in x_i$ und $y' \in x_j$ für $i,j \in I$ mit $i > j$.

Dann folgt analog zum vorherigen Beweis, dass $(y,y') \in r$ oder $(y',y) \in r$. □

Hausaufgabe 6.2.
Formel in der Sprache der Mengenlehre:

$$\begin{aligned} &\forall x \forall y \exists x' \exists y' (x' \cap y' = \emptyset \\ &\qquad \wedge (\exists f (f \in Funk(x,x') \wedge \forall b (b \in x' \to \exists a ((a \in x \wedge (a,b) \in f) \wedge \forall a' (a' \neq a \to (a',b) \notin f)))) \\ &\qquad \wedge \exists g (g \in Funk(y,y') \wedge \forall b (b \in y' \to \exists a ((a \in y \wedge (a,b) \in g) \wedge \forall a' (a' \neq a \to (a',b) \notin g)))))) \end{aligned}$$

Seien x, y Mengen. Dann existieren Mengen x', y' mit $x' \cap y' = \emptyset$ und Bij. $f: x \to x'$, $g: y \to y'$

<u>Bew</u>: Wir definieren $X := \{\emptyset\}$, $Y := \{\{\emptyset\}\}$ und $x' := x \times X$, $y' := y \times Y$

$x' \cap y' = \emptyset$:

Angen. nicht: dann ex. $(a,b) \in x' \cap y'$. Dann $\underset{(a,b) \in x'}{\emptyset} = \underset{(a,b) \in y'}{b = \{\emptyset\}}$ ↯

$X \cong X'$ $\quad f: X \to X'$, $a \mapsto \{a, \emptyset\}$

$f := \{z \in X \times X' ; \exists a \in X : z = (a, (a, \emptyset))\}$

- $\mathrm{Def}(f) = X$: Sei $a \in X$. Dann $(a, \emptyset) \in X'$ und $(a, (a, \emptyset)) \in f$
- f funktional: Sei $a \in X$ und $(a,b), (a,b') \in f$

  z: $b = b'$ $\quad b \underset{(a,b) \in f}{=} (a, \emptyset) = b'$ ✓
- f inj.: seien $(a,b), (a',b') \in f$ mit $b = b'$. Dann

  $(a, \emptyset) = b = b' = (a', \emptyset) \Rightarrow a = a'$
- f surj.: sei $(a, \emptyset) \in X'$, dann $(a (a, \emptyset)) \in f$

$g: Y \to Y'$

$g := \{z \in Y \times Y' ; \exists a \in Y : z = (a, (a, \{\emptyset\}))\}$

Rest analog

$\square$

Hausaufgabe 6.3.

(a) Def. $\quad Z\mathrm{ind}(Z) :\Leftrightarrow \emptyset \in Z \wedge \forall x (x \in Z \longrightarrow \{x\} \in Z)$

und $\quad Z\Phi(x) :\Leftrightarrow \forall I (Z\mathrm{ind}(I) \longrightarrow x \in I)$.

<u>Beh.:</u> $\exists J\ Z\mathrm{ind}(J) \Rightarrow$ Es gibt eine kl. Zind-Menge.

<u>Bew.:</u> Für J Zind def. $\hat{J} := \{x \in J ; Z\Phi(x)\}$.

<u>Beh.:</u> $\hat{J}$ Zind.

⌈ F.a. I Zind gilt per def $\emptyset \in I$, also

$\emptyset \in J \wedge \forall I (Z\mathrm{ind}(I) \longrightarrow \emptyset \in I)$

$\overset{\mathrm{Def}}{\Longrightarrow} \emptyset \in \hat{J}$. $\quad Z\Phi(\emptyset)$

Sei $x \in \hat{J}$.
Dann gilt $Z\Phi(x)$, d.h. $\forall I(\, Zind(I) \to x \in I)$
Per Def Zind gilt dann auch
$\forall I(\, Zind(I) \to \{x\} \in I)$, also

$\{x\} \in J \wedge \forall I(\, Zind(I) \to \{x\} \in I)$
$\overset{\text{Def}}{\Longrightarrow} \{x\} \in \hat{J}$. $\uparrow Z\Phi(\{x\})$

Zeige jetzt wie in VL: J, J' Zind $\Rightarrow \hat{J} = \hat{J}'$. $\square$

Def jetzt $\mathbb{N}_Z := \hat{J}$.
Wir zeigen noch:

(*) Beh: $y \in \mathbb{N}_Z \iff \overbrace{y = \emptyset \vee \exists y'(\, y' \in \mathbb{N}_Z \wedge y = \{y'\})}^{=:\varphi(y)}$

Bew: "$\Leftarrow$": Def Zind ✓
"$\Rightarrow$": Def. $A := \{y \in \mathbb{N}_Z \,;\, \varphi(y)\}$.
Zz: $A = \mathbb{N}_Z$.

Wie in VL gilt für $\mathbb{N}_Z$ ein ind. Prinz.
$\emptyset \in A$: ✓ (da $\emptyset = \emptyset \Rightarrow \varphi(\emptyset)$).
$y \to \{y\}$: Sei $y \in A$.
Zz.: $\{y\} \in A$.

$y \in A \Rightarrow y \in \mathbb{N}_Z \Rightarrow \exists y' \in \mathbb{N}_Z : \{y\} = \{y'\}$
$\Rightarrow \varphi(\{y\}) \Rightarrow \{y\} = A$. $\square$

(b) Beh: $\bigcup \mathbb{N}_Z = \mathbb{N}_Z$.

Bew: $z \in \bigcup \mathbb{N}_Z \iff \exists y\, (y \in \mathbb{N}_Z \wedge z \in y)$

$\underset{(\ast):\left\{\substack{y \neq \emptyset,\\ \text{da } z \in y}\right.}{\overset{\mathbb{N}_Z \text{ Zind}}{\iff}} \exists y\, (\exists y'\, (y' \in \mathbb{N}_Z \wedge y = \{y'\}) \wedge z \in y)$

$\Longleftrightarrow \exists y' \, (y' \in \mathbb{N}_z \wedge z \in \{y'\})$

$\Longleftrightarrow \quad z \in \mathbb{N}_z \ . \ \square$

(c) Sei $x \in \mathbb{N}_z$.

<u>Bdh.</u>: $x \notin x$.

<u>Bew.</u>: IA: $\emptyset \notin \emptyset$ ✓

IV: $x \notin x$

IS: Ang. $\{x\} \in \{x\}$.

Dann $\{x\} = x \quad \Rightarrow \quad x \in x$ ↯ $\square$

Formal Ind. mit $A := \{x \in \mathbb{N}_z \ ; \ x \notin x\}$