Studentische Lösungen zum Übungsblatt 4

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 4.1.

(a) Seien $A := \mathbb{Q}$, $S := \{+\}$, $S^* := \{+, <\}$ und

$$R := \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Q}^2 \mid a_1 < a_2\}$$

mit $\mathfrak{a}(+) := \mathfrak{a}^*(+) := +$, $\mathfrak{a}^*(<) := R$.

Beh.: $(A, \mathfrak{a}^*)$ ist keine rel. Def'erw. von $\mathcal{A} := (A, \mathfrak{a})$.

Bew.: Ang.: Doch (mit φ).
Def $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ als

$$\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}, \; x \longmapsto -x.$$

Dann π bij. und mit

$$\begin{aligned}
\pi(+^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)) &= -(a_1 + a_2) \\
&= -a_1 + (-a_2) \\
&= +^{\mathcal{A}}(\pi(a_1), \pi(a_2))
\end{aligned}$$

folgt $\pi : \mathcal{A} \cong \mathcal{A}$. Dann

$$\vec{a} = (a_1, a_2) \in \mathfrak{a}^*(<) \iff \mathcal{A}\frac{a_1 \; a_2}{x_1 \; x_2} \models \varphi$$

$$\overset{(G3.2)}{\iff} \mathcal{A}\frac{\pi(a_1)\;\pi(a_2)}{x_1 \quad x_2} \models \varphi$$

Erweiterung der Aussage für $\mathrm{frei}(\varphi) = \{x_1, x_2\}$

$$\iff (\pi(a_1), \pi(a_2)) \in \mathfrak{a}^*(<)$$

Aber $\vec{a} = (0, 1) \in R$ und $(0, -1) \notin R$ ↯ □

(b) <u>Beh:</u> $(\mathbb{Q}, +, Pos, <)$ ist eine rel. Def'erw. von
$\mathcal{A} := (\mathbb{Q}, +, Pos)$ für $Pos := \{a \in \mathbb{Q} \mid a > 0\}$.

<u>Bew.:</u> Def.

$$\varphi := \exists y \,(Pos\, y \wedge + x_1 y \equiv x_2).$$

Dann

$$(a_1, a_2) \in \mathfrak{A}^*(<) \Leftrightarrow a_1 < a_2$$

$$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Q},\ d > 0 : a_1 + d = a_2$$

$$\Leftrightarrow \exists d \in \mathbb{Q} : Pos\, d \wedge a_1 + d = a_2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{A} \tfrac{a_1\ a_2}{x_1\ x_2} \models \varphi \quad \square$$

(c) <u>Beh:</u> $(\mathbb{Q}, \cdot, <)$ ist <u>keine</u> rel. Def'erw. von
$\mathcal{A} = (\mathbb{Q}, \cdot)$ für $\mathfrak{A}(\cdot) := \cdot$.

<u>Bew.:</u> Ang.: Doch (mit φ).
Def $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$ als

$$\pi : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Dann π bij. und

Zeigen durch Falluntersch.

$$\pi(\cdot^{\mathcal{A}}(a_1, a_2)) = \pi(a_1 a_2) = \pi(a_1)\,\pi(a_2)$$
$$= \cdot^{\mathcal{A}}(\pi(a_1), \pi(a_2))$$

Also $\pi : \mathfrak{A} \cong \mathfrak{A}$. Dann

$$
\begin{aligned}
(a_1, a_2) \in \alpha^*(<) &\iff \mathfrak{A}\frac{a_1\ a_2}{x_1\ x_2} \models \varphi \\
&\overset{(G3.2)}{\iff} \mathfrak{A}\frac{\pi(a_1)\ \pi(a_2)}{x_1\ \ x_2} \models \varphi \\
&\iff (\pi(a_1), \pi(a_2)) \in \alpha^*(<).
\end{aligned}
$$

Aber $(1,2) \in \mathbb{R}$ und $(1, \frac{1}{2}) \notin \mathbb{R}$ ↯ □

Hausaufgabe 4.2.
Sei S eine Symbolmenge, φ, ψ S-Ausdrücke, $x_0, \dots, x_r$ paarweise verschiedene Variablen und $t_0, \dots, t_r$ S-Terme. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
[\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} &= \neg[(\neg\varphi \vee \neg\psi)]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \\
&= \neg\left([\neg\varphi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \vee [\neg\psi]\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right) \\
&= \neg\left(\neg\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \vee \neg\psi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right)
\end{aligned}
$$

und so gilt

$$
(\varphi \wedge \psi)\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} = \left(\varphi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r} \wedge \psi\frac{t_0 \dots t_r}{x_0 \dots x_r}\right).
$$

Analog kann man auch zeigen, dass 3.8.2 (e) auch für $\forall$ gilt.

(a)
$$
\begin{aligned}
\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ u\ u}{x\ y\ v} &= \exists x[\exists y(Pxu \wedge Pyv)]\frac{u\ x}{v\ x} = \exists x\exists y[(Pxu \wedge Pyv)]\frac{u\ y}{v\ y} \\
&= \exists x\exists y\left([Pxu]\frac{u\ y}{v\ y} \wedge [Pyv]\frac{u\ y}{v\ y}\right) = \exists x\exists y\left(Px\frac{u\ y}{v\ y}u\frac{u\ y}{v\ y} \wedge Py\frac{u\ y}{v\ y}v\frac{u\ y}{v\ y}\right) \\
&= \exists x\exists y(Pxu \wedge Pyu)
\end{aligned}
$$

(b)
$$
\begin{aligned}
\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{v\ fuv}{u\ \ v} &= \exists x[\exists y(Pxu \wedge Pyv)]\frac{v\ fuv\ x}{u\ \ v\ \ x} = \exists x\exists[y(Pxu \wedge Pyv)]\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y} \\
&= \exists x\exists y\left([Pxu]\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y} \wedge [Pyv]\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y}\right) \\
&= \exists x\exists y\left(Px\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y}u\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y} \wedge Py\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y}v\frac{v\ fuv\ y}{u\ \ v\ \ y}\right) \\
&= \exists x\exists y(Pxv \wedge Pyfuv)
\end{aligned}
$$

(c)
$$
\begin{aligned}
\exists x\exists y(Pxu \wedge Pyv)\frac{u\ x\ fuv}{x\ u\ \ v} &= \exists w[\exists y(Pxu \wedge Pyv)]\frac{x\ fuv\ w}{u\ \ v\ \ x} = \exists w\exists y[(Pxu \wedge Pyv)]\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \\
&= \exists w\exists y\left([Pxu]\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge [Pyv]\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}\right) \\
&= \exists w\exists y\left(Px\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}u\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y} \wedge Py\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}v\frac{x\ fuv\ w\ y}{u\ \ v\ \ x\ y}\right) \\
&= \exists w\exists y(Pwx \wedge Pyfuv)
\end{aligned}
$$

(d) $(\forall x \exists y (Pxy \wedge Pxu) \vee \exists u fuu \equiv x)\frac{x \;\, fxy}{x \;\, u}$

$$= \left([\forall x \exists y (Pxy \wedge Pxu)]\frac{x \;\, fxy}{x \;\, u} \vee [\exists u fuu \equiv x]\frac{x \;\, fxy}{x \;\, u} \right)$$

$$= \left(\forall v [\exists y (Pxy \wedge Pxu)]\frac{fxy \;\, v}{u \;\, x} \vee \exists u [fuu \equiv x]\frac{u}{u} \right)$$

$$= \left(\forall v \exists w [(Pxy \wedge Pxu)]\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} \vee \exists u [fuu]\frac{u}{u} \equiv x\frac{u}{u} \right)$$

$$= \left(\forall v \exists w \left([Pxy]\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} \wedge [Pxu]\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} \right) \vee \exists u f u\frac{u}{u} u\frac{u}{u} \equiv x \right)$$

$$= \left(\forall v \exists w \left(Px\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} y\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} \wedge Px\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} u\frac{fxy \;\, v \;\, w}{u \;\, x \;\, y} \right) \vee \exists u fuu \equiv x \right)$$

$$=(\forall v \exists w (Pvw \wedge Pvfxy) \vee \exists u fuu \equiv x)$$

Hausaufgabe 4.3.

Da im folgenden stets (Ext) angenommen wird, ergibt die Schreibweise von Mengen in geschwungenen Klammern Sinn.

(a)

Behauptung: $T_0 \not\models T_1$.
Beweis: Betrachte die LST-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Träger $A = \{a\}$ und $\mathrm{Ext}(a) = \emptyset$. Diese Struktur ist ein Modell zu T_0, da sie (Ext) und (Aus) trivialerweise erfüllt. Also $\mathfrak{A} \models T_0$. Aber $\mathfrak{A} \not\models T_1$, da es nicht die Paarmenge $\{a\}$ zu a und a gibt. □

(b)

Behauptung: $T_0 \not\models T_3$.
Beweis: Betrachte die LST-Struktur $\mathfrak{A}$ mit Träger $A = \{a\}$ und $\mathrm{Ext}(a) = \emptyset$. Diese Struktur ist ein Modell zu T_0, da sie (Ext) und (Aus) trivialerweise erfüllt. Also $\mathfrak{A} \models T_0$. Aber $\mathfrak{A} \not\models T_3$, da es nicht die Einermenge $\{a\}$ zu a gibt. □

(c)

Behauptung: $T_2 \models T_3$.
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige LST-Struktur, die (Ext)+(Aus)+Paar+$\bigcup$-Ax erfüllt. Es gilt zunächst, dass $\mathfrak{A}$ ebenfalls (Einer) erfüllt, da für $a \in A$, wobei A der Träger von $\mathfrak{A}$ ist, gilt, dass die Paarmenge zu a und a existiert, welche identisch zu der Einermenge von a ist. Weiterhin erhalten wir für $a, b \in A$ beliebig die Vereinigung $a \cup b$, indem wir die Paarmenge $\{a, b\}$ bilden und hiermit die große Vereinigung $\bigcup\{a, b\}$ bilden. Folglich gilt also auch $\cup$-Ax in $\mathfrak{A}$.

(d)

Behauptung: $T_3 \models T_1$
Beweis: Sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige LST-Struktur, die T_3 erfüllt. Es ist zu zeigen, dass $\mathfrak{A}$ (Paar) erfüllt. Seien $a, b \in \mathfrak{A}$ beliebig. Dann existiert nach (Einer) $\{a, \}$ und $\{b\}$. ($\cup$-Ax) gibt nun, dass $\{a, b\}$ existiert. Folglich gilt (Paar). □