Studentische Lösungen zum Übungsblatt 3

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 3.1.

Führe Beweis d. Koinzidenzlemmas in den Fällen $\varphi = t_1 \equiv t_2$, $t = c$ und $\varphi = (\psi \vee \chi)$; mit Also $\mathfrak{I}_1 = (\mathcal{A}_1, \beta_1)$, $\mathfrak{I}_2 = (\mathcal{A}_2, \beta_2)$ wie in EFT

Für $t = c$:

Nach Voraussetzung ist $c^{\mathcal{A}_1} = c^{\mathcal{A}_2}$ und daher

$$\mathfrak{I}_1(c) = c^{\mathcal{A}_1} = c^{\mathcal{A}_2} = \mathfrak{I}_2(c)$$

Für $\varphi = t_1 \equiv t_2$:

$$\mathfrak{I}_1 \models t_1 \equiv t_2 \iff \mathfrak{I}_1(t_1) = \mathfrak{I}_1(t_2)$$

Koinzidenzlemma Teil (a) $\longrightarrow$ $\iff \mathfrak{I}_2(t_1) = \mathfrak{I}_2(t_2)$

$$\iff \mathfrak{I}_2 \models t_1 \equiv t_2$$

Für $\varphi = (\psi \vee \chi)$:

(Hier ist die IV aus dem Koinzidenzlemma schon gezeigt)

$$\mathfrak{I}_1 \models (\psi \vee \chi) \iff \mathfrak{I}_1 \models \psi \text{ oder } \mathfrak{I}_1 \models \chi$$

Nach Induktionsvorr. $\longrightarrow$ $\iff \mathfrak{I}_2 \models \psi$ oder $\mathfrak{I}_2 \models \chi$

$$\iff \mathfrak{I}_2 \models (\psi \vee \chi)$$

Wie in Def. 3.4.5 (Seite 36) in EFT beschrieben sind die restlichen Ausdrücke ($\varphi = (\psi \wedge \chi)$, $\varphi = (\psi \rightarrow \chi)$, $\varphi = (\psi \leftrightarrow \chi)$ und $\varphi = \forall x \psi$) logisch äquivalent zu Ausdrücken, die nur $\vee, \neg, \exists$ enthalten. Da sich also jeder Ausdruck log. äquiv. zu einem Ausdruck mit $\vee, \neg, \exists$ ist, genügt es also, das Koinzidenzlemma für Ausdrücke dieser Form zu zeigen.

Hausaufgabe 3.2.

Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretation, sodass $\mathfrak{I} \models \forall x(\varphi \wedge \psi)$

a) $\mathfrak{I} \models \forall x(\varphi \wedge \psi)$ gdw für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (\varphi \wedge \psi)$

gdw für alle $a \in A$ gilt $(\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi)$

gdw für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und für alle $a \in A$ gilt $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models \forall x \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \forall x \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models (\forall x \varphi \wedge \forall x \psi)$

b) $\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi \vee \psi)$ gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (\varphi \vee \psi)$

gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \psi$

gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ oder es ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models \exists x \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \exists x \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)$

c) Sei $x \notin \text{frei}(\varphi)$. Da x gebunden stimmen $\mathfrak{I}$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x}$ auf allen freien Variablen überein und es gilt nach dem Koinzidenzlemma $\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für ein bel. $a \in A$. Ferner gilt:

$\mathfrak{I} \models \forall x(\varphi \vee \psi)$ gdw für alle $a \in A$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models (\varphi \vee \psi)$

gdw für alle $a \in A$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

$x \notin \text{frei}(\varphi)$ gdw für alle $a \in A$ $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder für alle $a \in A$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models \varphi$ oder $\mathfrak{I} \models \forall x \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models (\varphi \vee \forall x \psi)$

d) Sei $x \notin \text{frei}(\varphi)$. Da x gebunden gilt nach dem Koinzidenzlemma $\mathfrak{I} \models \varphi \Leftrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ für ein bel. $a \in A$. Ferner gilt

$\mathfrak{I} \models \exists x(\varphi \wedge \psi)$ gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \wedge \psi$

gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

$x \notin \text{frei}(\varphi)$ gdw $\mathfrak{I} \models \varphi$ und es existiert ein $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models \varphi$ und $\mathfrak{I} \models \exists x \psi$

gdw $\mathfrak{I} \models (\varphi \wedge \exists x \psi)$

e) Beispiel dafür, dass die Voraussetzung „$x \notin frei(\varphi)$" nötig war:

ⓒ Sei $\mathcal{A} = (\{0,1\}, \{0\})$ und $\beta(x) = 0$, dann ist $\mathfrak{I}$ ein Modell für $(Px \wedge \forall x\, x \equiv x)$ aber kein Modell für $\forall x (Px \wedge x \equiv x)$

Im ersten Ausdruck war x frei in φ. Also war die Voraussetzung nötig

ⓓ Sei $\mathcal{A} = (\{0,1\}, \alpha)$ und $\beta(x) = 1$, dann ist $\mathfrak{I}$ ein Modell von $(x \equiv 1 \wedge \exists x\, x \equiv 0)$ aber kein Modell von $\exists x (x \equiv 1 \wedge x \equiv 0)$.

Hausaufgabe 3.3.

3. Beh: Jede $*$-universelle S-Formel ist universell, aber nicht jede universelle S-Formel ist $*$-universell.

Bew: Induktion über den Formelaufbau:

Für φ sei E die Eigenschaft „φ $*$-universell $\Rightarrow$ φ universell"

(A1') Sei $t_1 \equiv t_2$ $*$-univ., nach (U1) ist $t_1 \equiv t_2$ univ.

(A2') Sei $Rt_1 \ldots t_n$ $*$-univ., nach (U1) ist $Rt_1 \ldots t_n$ univ.

(A3') Sei φ eine S-Formel mit Eig. E. Dann hat $\neg\varphi$ Eig. E, da $\neg\varphi$ nicht $*$-univ. ist und somit die Voraussetzung für E nicht erfüllt ist.

(A4') Seien φ und ψ S-Formeln mit Eigenschaft E. Dann haben $(\varphi \to \psi)$, $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ Eig. E, da nicht *-univ.
Sei $(\varphi \wedge \psi)$ *-univ., dann sind φ und ψ *-univ. und mit I.V. folgt φ und ψ sind univ., mit (U2) ist dann auch $(\varphi \wedge \psi)$ univ.
analog folgt für $(\varphi \vee \psi)$ *-univ. mit (U3) $(\varphi \vee \psi)$ univ.

(A5') Sei φ eine S-Formel mit Eig. E und x eine Variable.
Dann hat $\exists x \varphi$ Eig. E, da nicht *-univ.
Sei $\forall x \varphi$ *-univ., dann ist auch φ *-univ. und mit I.V. univ., dann folgt mit (U4) $\forall x \varphi$ ist univ.

Die Formel $\zeta = \neg x \equiv x$ ist als quantorenfreier Ausdruck universell (U1), ist aber nicht *-univ., da es „$\neg$" enthält.