Studentische Lösungen zum Übungsblatt 2

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 2.1.

Seien $gt: L^S \longrightarrow \mathbb{N}$ und $Q_n^S \subseteq L^S$ wie auf dem Blatt

Beh: (i) $L^S = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^S$

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}: \; Q_n^S \subsetneq Q_{n+1}^S$

(iii) Ind. klappt

Beweis (i) „$\supseteq$": ✓ (da $Q_n^S \subseteq L^S$ per Def.)

„$\subseteq$": Sei $\varphi \in L^S$.

Dann $\bar{n} := gt(\varphi) \in \mathbb{N}$ und damit

$$\varphi \in Q_{\bar{n}}^S \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n^S .$$

(ii) „$\subseteq$": $\varphi \in Q_n^S \Rightarrow gt(\varphi) \leq n$
$\Rightarrow gt(\varphi) \leq n+1$
$\Rightarrow \varphi \in Q_{n+1}^S$

„$\neq$": $(*)$: Beh: $\forall n \in \mathbb{N} \; \exists \varphi \in L^S : gt(\varphi) = n$

IA: $n=0$: Sei $\varphi \in L^S$ atomar, dann $gt(\varphi) = 0$.

IV: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $\exists \varphi \in L^S: gt(\varphi) = n$.

IS: Def. $\psi := \exists x \varphi$ für x Var., dann

$gt(\psi) = gt(\varphi) + 1 = n+1$.

Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ex. $\varphi \in Q_{n+1}^S \setminus Q_n^S$.

$(*)$ für $n+1$

(iii) Sei $Z \subseteq L^S$ mit

(a) $Q_0^S \subseteq Z$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}: Q_n^S \subseteq Z \to Q_{n+1}^S \subseteq Z$.

Z.z.: $Z = L^S$.

Zeige per Ind. mit (a),(b), dass

$\forall n \in \mathbb{N}: Q_n^S \subseteq Z$ (*)

gilt. Dass

$Z \subseteq L^S \overset{(i)}{=} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n^S \overset{(*)}{\subseteq} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Z = Z$ □

Hausaufgabe 2.2.

H2.2 **2.4.7 Aufgabe** Man modifiziere den Ausdruckskalkül, indem man in 2.3.2 (A4) die Klammern fortlässt, also etwa für „$(\varphi \wedge \psi)$" einfach „$\varphi \wedge \psi$" schreibt. Zum Beispiel ist $\chi := \exists v_0 P v_0 \wedge Q v_1$ ein $\{P, Q\}$-Ausdruck im neuen Sinn. Man

Beh: Das Analogon von 2.4.4 nicht mehr gilt und dass die entsprechend modifizierte Festlegung für TA es erlaubt, $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, Pv_0 \wedge Qv_1, Pv_0, Qv_1\}$ und $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, \exists v_0 P v_0, Pv_0, Qv_1\}$ zu gewinnen, also keine Funktion mehr definiert.

Bew: (1) Analogon gilt nicht mehr.

Ich zeige, dass für $\chi = \exists v_0 P v_0 \wedge Q v_1$ sowohl (4), als auch (9) erfüllt sind:

(i)

(1)	v_0	(T1)
(2)	v_1	(T1)
(3)	Pv_0	(A2) auf (1)
(4)	Qv_1	(A2) auf (2)
(5)	$Pv_0 \wedge Qv_1$	(A4) auf (3),(4)
(6)	$\exists v_0 Pv_0 \wedge Qv_1$	(A5) auf (5)

(ii)

(1)	v_0	(T1)
(2)	v_1	(T1)
(3)	Pv_0	(A2) auf (1)
(4)	Qv_1	(A2) auf (2)
(5)	$\exists v_0 P v_0$	(A5) auf (3)
(6)	$\exists v_0 P v_0 \wedge Qv_1$	(A4) auf (5),(4)

χ in (i) von der Form $\exists v_0 \varphi$, wobei $\varphi = Pv_0 \wedge Qv_1$

in (ii) ist von der Form $\varphi \wedge \psi$, wobei $\varphi = \exists v_0 P v_0$, $\psi = Qv_1$ ┘

(2) $\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, Pv_0 \wedge Qv_1, Pv_0, Qv_1\}$ und

$\mathrm{TA}(\chi) = \{\chi, \exists v_0 Pv_0, Pv_0, Qv_1\}$

Analog zu (1) lässt sich $\chi = \exists v_0 Pv_0 \wedge Qv_1$ auffassen als

(i) $\exists v_0\, \varphi$ mit $\varphi = Pv_0 \wedge Qv_1$ und

(ii) $\psi \wedge Qv_1$ mit $\psi = \exists v_0 Pv_0$.

In Fall (i) ist $TA(\chi) = TA(\exists v_0 \varphi) = \{\exists v_0 \varphi\} \cup TA(\varphi)$
$= \{\chi\} \cup TA(Pv_0 \wedge Qv_1) = \{\chi\} \cup \{Pv_0 \wedge Qv_1\} \cup TA\{Pv_0\} \cup TA\{Qv_1\}$
$= \{\chi\} \cup \{Pv_0 \wedge Qv_1\} \cup \{Pv_0\} \cup \{Qv_1\} = \{\chi, Pv_0 \wedge Qv_1, Pv_0, Qv_1\}$

In Fall (ii) ist $TA(\chi) = TA(\psi \wedge Qv_1) = \{\psi \wedge Qv_1\} \cup TA(\psi) \cup TA(Qv_1)$
$= \{\chi\} \cup TA(\exists v_0 Pv_0) \cup \{Qv_1\} = \{\chi\} \cup \{\exists v_0 Pv_0\} \cup \{Pv_0\} \cup \{Qv_1\}$
$= \{\chi, \exists v_0 Pv_0, Pv_0, Qv_1\}$

Hausaufgabe 2.3.

Beh: $\forall \varphi \in L^S: (\varphi \text{ positiv} \Rightarrow \exists \mathcal{J} \text{ Interpretation}: \mathcal{J} \models \varphi)$

Bew: Wir zeigen: es ex. eine Interpretation $\mathcal{J}$ mit $\forall \varphi \in L^S: \varphi \text{ pos} \Rightarrow \mathcal{J} \models \varphi$

$\mathcal{J} = ((A, \mathfrak{a}), \beta)$, wobei

- $A = \{a\}$
- $\mathfrak{a}(c) = a$ f.a. $c \in S_K$
- $\mathfrak{a}(f): A^n \xrightarrow{\text{surj.}} A$ f.a. $f \in S_F$, $\sigma(f) = n$
- $\mathfrak{a}(R) := A^n \subseteq A^n$ f.a. $R \in S_R$, $\sigma(R) = n$
- $\beta(v_i) = a$ f.a. Variablen v_i

(*) Beh: $\forall t \in T^S: \mathcal{J}(t) = a$

Bew: Sei E: "$t \in T^S \Rightarrow \mathcal{J}(t) = a$" Eig

(1) $\mathcal{J}(c) = \sigma(c) = a$, $\mathcal{J}(v_i) = \beta(v_i) = a$

(2) Seien $t_1, \dots, t_n$ mit E, $f \in S_F$, $\sigma(f) = n$

$$\mathcal{J}(f t_1 \dots t_n) = \sigma(f)(\mathcal{J}(t_1), \dots, \mathcal{J}(t_n)) \underset{\text{Def von } \mathfrak{a}(f)}{=} a$$

Sei E: "$\varphi \in L^S$, φ positiv $\Rightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$"

(A1') $\mathfrak{I} \models t_1 \equiv t_2 \iff \mathfrak{I}(t_1) = \mathfrak{I}(t_2) \overset{\circledast}{\iff} a = a$

(A2') $\mathfrak{I} \models R t_1 \ldots t_n \iff (\mathfrak{I}(t_1), \ldots, \mathfrak{I}(t_n)) \in a(R)$

$\iff (a, \ldots, a) \in A^n$

Def von $a(R)$

(A3') φ mit E. Dann besitzt $\neg\varphi$ Eig. E, da „$\neg\varphi$ pos" falsch ist.

(A4') φ, ψ mit E. Dann gilt

$* = \wedge, \vee$ $\quad \mathfrak{I} \models (\varphi * \psi) \iff \mathfrak{I} \models \varphi * \mathfrak{I} \models \psi$

$(\varphi \rightleftarrows \psi)$ habe E, da Vor. falsch.

(A5') φ mit E, x Var.

$* = \exists, \forall$ $\quad \mathfrak{I} \models * x \varphi \iff * k \in A: \mathfrak{I}\frac{k}{x} \models \varphi$

$\iff \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi \iff \mathfrak{I} \models \varphi$

Def A $\qquad$ Def $\mathfrak{B}$ & Koinzidenzlemma

$\square$