

## Studentische Lösungen zum Übungsblatt 12

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

### Hausaufgabe 12.1.

**Behauptung.** Ist  $\mathfrak{C}$  elementar so ist auch die zu  $\mathfrak{C}$  komplementäre Klasse  $\mathfrak{K}$  elementar.

*Beweis.* Da  $\mathfrak{C}$  elementar ist, gibt es einen  $S$ -Satz  $\varphi$  mit  $\mathfrak{C} = \text{Mod}^S \varphi$ . Dann gilt für alle  $S$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \in \mathfrak{K} \iff \mathfrak{A} \notin \mathfrak{C} \iff \mathfrak{A} \not\models \varphi \iff \mathfrak{A} \models \neg \varphi.$$

Also gilt  $\mathfrak{K} = \text{Mod}^S \neg \varphi$  und somit ist  $\mathfrak{K}$  elementar.  $\square$

**Behauptung.** Die Klasse der unendlichen Gruppen ist  $\Delta$ -elementar, aber nicht elementar.

*Beweis.* Sei  $\mathfrak{C}$  die Klasse der unendlichen Gruppen. Wir zeigen zunächst, dass  $\mathfrak{C}$   $\Delta$ -elementar ist. Sei  $\varphi_{Gr}$  die Konjunktion der Gruppenaxiome und sei

$$\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \dots \exists x_n \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \equiv x_j.$$

Dann gilt  $\mathfrak{C} = \text{Mod}^S \{\varphi_{Gr}\} \cup \{\varphi_{\geq n} : n \in \omega\}$  und somit ist  $\mathfrak{C}$   $\Delta$ -elementar.

Wir zeigen nun, dass  $\mathfrak{C}$  nicht elementar sein kann. Angenommen  $\mathfrak{C}$  wäre elementar. Dann ist nach (a) auch die zu  $\mathfrak{C}$  komplementäre Klasse  $\mathfrak{K}$  elementar. Sei  $\psi$  ein  $S$ -Satz mit  $\mathfrak{K} = \text{Mod}^S \psi$  und sei  $\chi := \varphi_{Gr} \wedge \psi$ . Dann gilt für alle  $S$ -Strukturen  $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A} \models \chi \iff \mathfrak{A} \models \varphi_{Gr} \text{ und } \mathfrak{A} \notin \mathfrak{C}.$$

Also gilt  $\mathfrak{A} \models \chi$  genau dann, wenn  $\mathfrak{A}$  eine endliche Gruppe ist. Aber das ist ein Widerspruch, da die Klasse der endlichen Gruppen nicht elementar ist. Somit kann  $\mathfrak{C}$  auch nicht elementar sein.  $\square$

### Hausaufgabe 12.2.

Wir betrachten als erstes die Kontrapositionsregeln (vgl. 4.3.3 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas):

#### 4.3.3 Kontrapositionsregeln (KP)

Rechtfertigung von (a).

$$(a) \frac{\Gamma \quad \varphi \quad \psi}{\Gamma \quad \neg \psi \quad \neg \varphi}$$

$$(b) \frac{\Gamma \quad \neg \varphi \quad \neg \psi}{\Gamma \quad \psi \quad \varphi}$$

1.  $\Gamma \quad \varphi \quad \psi$  Prämisse
2.  $\Gamma \quad \neg \psi \quad \varphi \quad \psi$  (Ant) auf 1.
3.  $\Gamma \quad \neg \psi \quad \varphi \quad \neg \psi$  (Vor)
4.  $\Gamma \quad \neg \psi \quad \varphi \quad \neg \varphi$  (Wid') auf 2., 3.
5.  $\Gamma \quad \neg \psi \quad \neg \varphi \quad \neg \varphi$  (Vor)
6.  $\Gamma \quad \neg \psi \quad \neg \varphi$  (FU) auf 4., 5.

Mit Hilfe der Kontrapositionsregeln können wir nun die Regeln ableiten.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(a1) <math>\frac{\Gamma \quad \forall x \varphi}{\Gamma \quad \varphi_x^x}</math></p> <p>Rechtfertigung</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\Gamma \quad \forall x \varphi</math> Prämisse</li> <li>2. <math>\Gamma \quad \neg \exists x \neg \varphi</math> <math>\forall x \varphi \equiv \neg \exists x \neg \varphi</math></li> <li>3. <math>\Gamma \quad \neg \varphi_x^x</math> <math>\neg \varphi_x^x</math> (Vor)</li> <li>4. <math>\Gamma \quad \neg \varphi_x^x</math> <math>\exists x \neg \varphi</math> (JS) auf 3.</li> <li>5. <math>\Gamma \quad \neg \exists x \neg \varphi</math> <math>\varphi_x^x</math> (KP)(c) auf 4.</li> <li>6. <math>\Gamma \quad \varphi_x^x</math> (KS) auf 2., 5.</li> </ol> | <p>(a2) <math>\frac{\Gamma \quad \forall x \varphi}{\Gamma \quad \varphi}</math></p> <p>Rechtfertigung</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>\Gamma \quad \neg \exists x \neg \varphi</math> Prämisse</li> <li>2. <math>\Gamma \quad \neg \varphi_x^x</math> <math>\neg \varphi_x^x</math> (Vor)</li> <li>3. <math>\Gamma \quad \neg \varphi_x^x</math> <math>\exists x \neg \varphi</math> (JS) auf 2.</li> <li>4. <math>\Gamma \quad \neg \exists x \neg \varphi</math> <math>\varphi_x^x</math> (KP)(c) auf 3.</li> <li>5. <math>\Gamma \quad \varphi_x^x</math> (KS) auf 1., 4.</li> <li>6. <math>\Gamma \quad \varphi</math> <math>\varphi = \varphi_x^x</math></li> </ol> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                                         |          |                               |                                                                                     |                                                                                           |          |                               |                                                                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|----------|-------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| (b1) $\frac{\Gamma \varphi \frac{x}{x} \psi}{\Gamma \forall x \varphi \psi}$                                            |          |                               |                                                                                     | (b3) $\frac{\Gamma \varphi \psi}{\Gamma \forall x \varphi \psi}$                          |          |                               |                                                                                     |
| Rechtfertigung                                                                                                          |          |                               |                                                                                     | Rechtfertigung                                                                            |          |                               |                                                                                     |
| 1.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\varphi \frac{x}{x} \psi$    | Prämisse                                                                            | 1.                                                                                        | $\Gamma$ | $\varphi \psi$                | Prämisse                                                                            |
| 2.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \psi$                   | $\neg \varphi \frac{x}{x}$ (KP)(c) auf 1.                                           | 2.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \psi$                   | $\neg \varphi$ (KP)(c) auf 1                                                        |
| 3.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \psi$                   | $\exists x \neg \varphi$ ( $\exists S$ ) auf 2.                                     | 3.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \psi$                   | $\neg \varphi \frac{x}{x}$                                                          |
| 4.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | $\psi$ (KP)(c) auf 3.                                                               | 4.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \psi$                   | $\exists x \neg \varphi$ ( $\exists S$ ) auf 3.                                     |
| 5.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\forall x \varphi$           | $\psi$ $\neg \exists x \neg \varphi = \forall x \varphi$                            | 5.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | $\psi$ (KP)(c) auf 4.                                                               |
|                                                                                                                         |          |                               |                                                                                     | 6.                                                                                        | $\Gamma$ | $\forall x \varphi$           | $\psi$ $\neg \exists x \neg \varphi = \forall x \varphi$                            |
| (b2) $\frac{\Gamma \varphi \frac{x}{x}}{\Gamma \forall x \varphi}$ , falls $x$ nicht frei in $\Gamma \forall x \varphi$ |          |                               |                                                                                     | (b4) $\frac{\Gamma \varphi}{\Gamma \forall x \varphi}$ , falls $x$ nicht frei in $\Gamma$ |          |                               |                                                                                     |
| Rechtfertigung                                                                                                          |          |                               |                                                                                     | Rechtfertigung                                                                            |          |                               |                                                                                     |
| 1.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\varphi \frac{x}{x}$         | Prämisse                                                                            | 1.                                                                                        | $\Gamma$ | $\varphi$                     | Prämisse                                                                            |
| 2.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\exists x \neg \varphi$      | $\varphi \frac{x}{x}$ (Ant) auf 1.                                                  | 2.                                                                                        | $\Gamma$ | $\exists x \neg \varphi$      | $\varphi$ (Ant) auf 1.                                                              |
| 3.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \varphi \frac{x}{x}$    | $\neg \exists x \neg \varphi$ (KP)(a) auf 2.                                        | 3.                                                                                        | $\Gamma$ | $\exists x \neg \varphi$      | $\varphi = \varphi \frac{x}{x}$                                                     |
| 4.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\exists x \neg \varphi$      | $\neg \exists x \neg \varphi$ ( $\exists A$ ) auf 3. ( $x$ nicht frei in $\Gamma$ ) | 4.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \varphi \frac{x}{x}$    | $\neg \exists x \neg \varphi$ (KP)(a) auf 3.                                        |
| 5.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ ( $\forall \neg$ )                                    | 5.                                                                                        | $\Gamma$ | $\exists x \neg \varphi$      | $\neg \exists x \neg \varphi$ ( $\exists A$ ) auf 4. ( $x$ nicht frei in $\Gamma$ ) |
| 6.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ (FU) auf 4, 5                                         | 6.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ ( $\forall \neg$ )                                    |
| 7.                                                                                                                      | $\Gamma$ | $\forall x \varphi$           | $\neg \exists x \neg \varphi = \forall x \varphi$                                   | 7.                                                                                        | $\Gamma$ | $\neg \exists x \neg \varphi$ | (FU) auf 5, 6.                                                                      |
|                                                                                                                         |          |                               |                                                                                     | 8.                                                                                        | $\Gamma$ | $\forall x \varphi$           | $\neg \exists x \neg \varphi = \forall x \varphi$                                   |

### Hausaufgabe 12.3.

**Behauptung.** Jede widerspruchsfreie Menge lässt sich zu einer maximalkonsistenten Menge erweitern.

*Beweis mit Lemma von Zorn.* Sei  $\Phi \subseteq L_0^S$  eine widerspruchsfreie Menge und sei

$$X := \{\Psi \subseteq L_0^S : \Phi \subseteq \Psi \text{ und } \Psi \text{ ist widerspruchsfrei}\}.$$

Dann ist  $(X, \subseteq)$  eine partielle Ordnung. Wir werden zeigen, dass  $(X, \subseteq)$  kettenvollständig ist. Sei  $C \subseteq X$  eine nicht-leere Kette. Betrachte  $\bigcup C$ . Nach Definition gilt für alle  $\Psi \in C$ , dass  $\Phi \subseteq \Psi$ . Somit gilt auch  $\Phi \subseteq \bigcup C$ . Angenommen  $\bigcup C$  wäre nicht widerspruchsfrei. Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $\{\psi_0, \dots, \psi_n\} \subseteq \bigcup C$  die nicht widerspruchsfrei ist. Seien  $\Psi_i \in C$  mit  $\psi_i \in \Psi_i$ . O.B.d.A gelte  $\Psi_0 \subseteq \Psi_1 \subseteq \dots \subseteq \Psi_n$ . Dann gilt  $\{\psi_0, \dots, \psi_n\} \subseteq \Psi_n$ . Aber das ist ein Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit von  $\Psi_n$ . Also ist  $\bigcup C$  eine obere Schranke von  $C$  und so ist  $(X, \subseteq)$  kettenvollständig. Nach dem Zornschen Lemma gibt es ein maximales Element  $\Psi$ . Dann ist  $\Phi$  widerspruchsfrei und es gilt  $\Phi \subseteq \Psi$ . Angenommen  $\Psi$  wäre nicht maximalkonsistent. Dann gibt es eine widerspruchsfreie echte Obermenge  $\Psi' \in X$ . Aber das wäre ein Widerspruch zur Maximalität von  $\Psi$ . Also ist  $\Psi$  eine maximalkonsistente Obermenge von  $\Phi$ .  $\square$

*Beweis mit Wohlordnungssatz.* Sei  $\Phi \subseteq L_0^S$  eine widerspruchsfreie Menge. Nach dem Wohlordnungssatz ist  $L_0^S$  wohlordenbar. Also gibt es eine Ordinalzahl die in Bijektion zu  $L_0^S$  steht. Sei  $f : \alpha \rightarrow L_0^S$  so eine Bijektion und sei  $\varphi_\beta := f(\beta)$  für  $\beta \in \alpha$ . Wir definieren rekursiv

$$\begin{aligned} \Psi_0 &:= \Phi \\ \Psi_{\beta+1} &:= \begin{cases} \Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\} & \Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\} \text{ ist widerspruchsfrei} \\ \Psi_\beta & \text{sonst} \end{cases} \\ \Psi_\lambda &:= \bigcup \{\Psi_\beta : \beta < \lambda\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun per Induktion, dass  $\Psi_\beta$  für alle  $\beta < \alpha$  widerspruchsfrei ist. Für  $\beta = 0$  folgt dies direkt aus der Definition.

Sei  $\beta < \alpha$  sodass  $\Psi_\beta$  widerspruchsfrei ist. Dann gilt entweder  $\Psi_{\beta+1} = \Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$  oder  $\Psi_{\beta+1} = \Psi_\beta$ . Ersteres gilt nur wenn  $\Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$  widerspruchsfrei ist. Somit ist  $\Psi_{\beta+1}$  in beiden Fällen widerspruchsfrei.

Sei  $\lambda < \alpha$  eine Limeszahl sodass  $\Psi_\beta$  für alle  $\beta < \lambda$  widerspruchsfrei ist. Angenommen  $\Psi_\lambda$  wäre widerspruchsvoll. Dann gibt es eine endliche Teilmenge  $\Psi^* \subseteq \Psi_\lambda$  die widerspruchsvoll ist. Da  $\Psi^*$  endlich ist, gibt es ein  $\beta < \lambda$  mit  $\Psi^* \subseteq \Psi_\beta$ . Aber das kann nicht sein. Also ist  $\Psi_\lambda$  widerspruchsfrei.

Sei nun  $\Psi := \bigcup \{\Psi_\beta : \beta \in \alpha\}$ . Dann gilt  $\Phi \subseteq \Psi$ . Wir müssen zeigen, dass  $\Psi$  widerspruchsfrei und maximalkonsistent ist. Mit dem gleichen Argument wie im Limeschritt ist  $\Psi$  widerspruchsfrei. Sei  $\varphi \in L_0^S \setminus \Psi$  und sei  $\beta < \alpha$  mit  $\varphi = \varphi_\beta$ . Dann kann  $\Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$  nicht widerspruchsfrei sein, da sonst nach Definition  $\Psi_{\beta+1} = \Psi_\beta \cup \{\varphi_\beta\}$  wäre und so  $\varphi_\beta \in \Psi$  gelten würde. Also kann auch  $\Psi \cup \{\varphi\}$  nicht widerspruchsfrei sein. Daher ist  $\Psi$  ist maximalkonsistent.  $\square$

Der zweite Beweis nutzt das Auswahlaxiom nur um sicherzustellen, dass  $L_0^S$  wohlordenbar ist. Wenn  $S$  abzählbar ist, können wir, ohne Verwendung des Auswahlaxioms, eine Wohlordnung auf  $L_0^S$  definieren: Da  $S$  abzählbar ist, ist auch das Alphabet  $A$  der Sprache  $S$  abzählbar. Nach Lemma 2.1.2 aus dem Buch von Ebbinghaus, Flum und Thomas, ist auch die Menge  $A^*$  der Zeichenketten über  $A$  abzählbar. Sei  $f : \omega \rightarrow A^*$  eine Bijektion und  $\preceq$  die von  $f$  induzierte Wohlordnung  $\preceq$  auf  $A^*$ . Dann ist  $\preceq \cap (L_0^S)^2$  eine Wohlordnung auf  $L_0^S$ .