Studentische Lösungen zum Übungsblatt 11

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 11.1.

Beh: Seien X, Y, Z Mengen, $A := \mathrm{Abb}(Y, X)$
$B := \mathrm{Abb}(Z, A)$, $C := \mathrm{Abb}(Y \times Z, X)$.
Dann $B \cong C$.

Bew: Definiere

$$\varphi : B \to C,\ f \mapsto \left(\begin{array}{l} Y \times Z \to X \\ (x,z) \mapsto (f(z))(y) \end{array} \right)$$

$$\psi : C \to B,\ g \mapsto \left(\begin{array}{l} Z \to A \\ z \mapsto \left(\begin{array}{l} Y \to X \\ y \mapsto g(y,z) \end{array} \right) \end{array} \right)$$

Dann $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_B$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_C$:
Sei $f \in B$, dann gilt f.a. $y \in Y$, $z \in Z$

$$\psi(\varphi(f))(z)(y) \overset{\text{Def.}\psi}{=} \varphi(f)(y,z) \overset{\text{Def.}\varphi}{=} f(z)(y)$$

Sei $g \in C$, dann gilt f.a. $(y,z) \in Y \times Z$

$$\varphi(\psi(g))(y,z) \overset{\text{Def}\,\varphi}{=} \psi(g)(z)(y) \overset{\text{Def}\,\psi}{=} g(y,z)$$

Also $B \cong C$. $\square$

Lemma 1:
Seien X, X', Y, Y' Mengen mit $X \cong X'$ und $Y \cong Y'$. Dann $\mathrm{Abb}(X, Y) \cong \mathrm{Abb}(X', Y')$

Bew: Seien $\varphi : X \to X'$ und $\psi : Y \to Y'$ bij.

Dann ist
$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(X,Y) &\cong \mathrm{Abb}(X',Y') \\ f &\longmapsto \psi \circ f \circ \varphi^{-1} \\ \psi^{-1} \circ g \circ \varphi &\longleftarrow\!\!\shortmid\; g \end{aligned}$$
bijektiv. $\square$

Lemma 2:
$$\mathbb{R} \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$

Bew: Nach Ana I lässt sich jede reelle Zahl x eindeutig schreiben als
$$x = \sum_{i \in \mathbb{Z}} a_i^{(x)} \cdot 2^i \quad , \quad a_i^{(x)} \in \{0,1\}$$
Dies definiert eine Bijektion
$$\mathbb{R} \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{Z}, \{0,1\})$$
Da $\mathbb{N} \cong \mathbb{Z}$, gilt nach Lemma 1
$$\mathbb{R} \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})$$
$\square$

Beh: $\mathbb{R} \cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$

Bew: Es gilt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \cong \mathbb{N}$
$$\begin{aligned} \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) &\overset{\text{Lemma 1\&2}}{\cong} \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\})) \\ &\cong \mathrm{Abb}(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\overset{\text{Lemma 1}}{\cong} \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \{0,1\}) \\ &\overset{\text{Lemma 2}}{\cong} \mathbb{R} \end{aligned}$$
$\square$

Hausaufgabe 11.2.

Bel. $\forall \alpha: V_\alpha$ trans und $\underbrace{\{\beta \in V_\alpha : \beta \text{ Ord.}\}}_{=: U_\alpha} = \alpha$

Bew. Transfinite Induktion über α

$\alpha = 0$: V_0 trans ✓

$U_0 = \emptyset = 0$ ✓

$\alpha = \alpha' + 1$: V_α trans: Seien $x \in y \in V_\alpha = Pot(V_{\alpha'})$

D.h. $y \subseteq V_{\alpha'}$, insb. $x \in V_{\alpha'}$

Da $V_{\alpha'}$ trans nach I.V., ist $x \subseteq V_{\alpha'}$

also $x \in Pot(V_{\alpha'}) = V_\alpha$

z.z. $U_\alpha = \alpha$

Sei β Ord dann

$\beta \in U_\alpha \iff \beta \in V_\alpha \iff \beta \in Pot(V_{\alpha'})$

$\iff \beta \subseteq V_{\alpha'} \iff \beta \subseteq U_{\alpha'}$

$\overset{IV}{\iff} \beta \subseteq \alpha' \iff \beta \in \alpha$

α Limzahl: V_α trans:

Seien $x \in y \in V_\alpha = \bigcup\{V_\xi : \xi < \alpha\}$

Dann ex $\xi < \alpha$ mit $y \in V_\xi$. Da V_ξ nach IV trans ist, gilt $x \in y \in V_\xi \in V_\alpha$.

z.z. $U_\alpha = \alpha$

Sei β Ord dann gilt

$\beta \in U_\alpha \iff \exists \xi < \alpha : \beta \in V_\xi$

$\iff \exists \xi < \alpha : \beta \in U_\xi$

$\overset{IV}{\iff} \exists \xi < \alpha : \beta \in \xi$

$\iff \beta \in \alpha$ $\square$

Hausaufgabe 11.3. Sei Φ eine Menge von Formeln.

(a) Sei (R_Φ) die Regel

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}, \text{ falls } \varphi \in \Phi$$

und sei $\mathfrak{K}_\Phi$ der Kalkül, der nur die Regel (R_Φ) hat.

Behauptung. Sei Ψ eine Menge von Formeln und sei φ eine Formel. Dann gilt $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ genau dann, wenn $\varphi \in \Phi$.

Beweis. "$\Rightarrow$": Sei $S_1 \dots S_n$ eine $\mathfrak{K}_\Phi$-Ableitung mit $S_n = \Gamma\varphi$ und $T_\Gamma \subseteq \Psi$. Da $\mathfrak{K}_\Phi$ nur eine Regel hat, ist $S_n \in (R_\Phi)$. Somit gilt $\varphi \in \Phi$.

"$\Leftarrow$": Sei $\varphi \in \Phi$ und sei $\Gamma \subseteq T_\Psi$. Dann ist $\Gamma\varphi \in (R_\Phi)$ und so ist die Folge $S_1 := \Gamma\varphi$ eine $\mathfrak{K}_\Phi$-Ableitung. Also gilt $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$. $\square$

(b) Angenommen Φ wäre nicht $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei. Dann gibt es eine Formel φ sodass $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \neg\varphi$ gelten. Nach (a) gilt dann $\varphi, \neg\varphi \in \Phi$. Also gilt auch $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \varphi$ und $\vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \neg\varphi$. Aus der Korrektheit folgt nun, dass $\models \varphi$ und $\models \neg\varphi$ gelten. Aber dies ist ein Widerspruch. Also ist Φ $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(c) Die Umkehrung von (b) gilt im Allgemeinem nicht. Betrachte zum Beispiel $\varphi = \neg x \equiv x$ und $\Phi = \{\varphi\}$. Dann ist $\mathfrak{K}_\Phi$ nicht korrekt aber Φ ist $\mathfrak{K}_\Phi$-widerspruchsfrei.

(d) Sei $\varphi = x \equiv x$ und sei $\Phi = \{\varphi\}$. Dann gilt für jede Menge von Formeln Ψ, $\Psi \vdash_{\mathfrak{K}_\Phi} \psi$ genau dann, wenn $\psi = \varphi$. Also ist $\mathfrak{K}_\Phi$ nicht explosiv. Der Kalkül ist aber korrekt, da jede Interpretation φ erfüllt und so $\models \varphi$ gilt.