Studentische Lösungen zum Übungsblatt 10

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 10.1.
(c)

Behauptung. Für alle Ordinalzahlen α, β und γ mit $\alpha < \beta$ gilt $\gamma + \alpha < \gamma + \beta$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch transfinite Induktion nach β. Sei δ eine Ordinalzahl und $Z := \{\beta \in \delta : \forall \alpha, \gamma(\alpha < \beta \to (\gamma + \alpha < \gamma + \beta))\}$.

1. Es gibt kein $\alpha < 0$. Somit ist $0 \in Z$.

2. Sei $\beta \in Z$ und $\alpha < S(\beta)$. Dann gilt $\alpha < \beta$ oder $\alpha = \beta$. Im ersten Fall gilt

   $$\gamma + \alpha \overset{\beta \in Z}{<} \gamma + \beta < S(\gamma + \beta) = \gamma + S(\beta)$$

   und im zweiten Fall

   $$\gamma + \alpha = \gamma + \beta < S(\gamma + \beta) = \gamma + S(\beta).$$

   Also gilt $S(\beta) \in Z$.

3. Sei $\lambda < \delta$ eine Limeszahl mit $\lambda \subseteq Z$ und sei $\alpha < \lambda$. Dann gilt $\alpha < S(\alpha) < \lambda$ und so $\gamma + \alpha < \gamma + S(\alpha)$. Weiter gilt $\gamma + \lambda = \bigcup\{\gamma + \beta : \beta < \lambda\}$. Also $\gamma + \alpha < \gamma + \lambda$ und so gilt $\lambda \in Z$.

Nach dem Satz über die transfinite Induktion gilt nun $Z = \delta$. Da dies für beliebig große Ordinalzahlen δ gilt, folgt die Behauptung. ☐

(a)

Behauptung. Für alle Ordinalzahlen α, β und γ gilt $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch transfinite Induktion nach γ. Sei δ eine Ordinalzahl und $Z := \{\gamma \in \delta : \forall \alpha, \beta(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)\}$.

1. Es gilt

   $$(\alpha + \beta) + \gamma = (\alpha + \beta) + 0 = \alpha + \beta = \alpha + (\beta + 0) = \alpha + (\beta + \gamma).$$

   Somit ist $0 \in Z$.

2. Sei $\gamma \in Z$. Dann gilt

   $$(\alpha + \beta) + S(\gamma) = S((\alpha + \beta) + \gamma) \overset{\gamma \in Z}{=} S(\alpha + (\beta + \gamma)) = \alpha + S(\beta + \gamma) = \alpha + (\beta + S(\gamma)).$$

   Somit ist $S(\gamma) \in Z$.

3. Sei $\lambda < \delta$ eine Limeszahl mit $\lambda \subseteq Z$. Dann gilt

   $$\begin{aligned}(\alpha + \beta) + \lambda &= \bigcup\{(\alpha + \beta) + \gamma : \gamma < \lambda\} \overset{\lambda \subseteq Z}{=} \bigcup\{\alpha + (\beta + \gamma) : \gamma < \lambda\} \\ &\overset{(c)}{=} \bigcup\{\alpha + \gamma : \gamma < \beta + \lambda\} \underset{\text{Limes}}{\overset{\beta+\lambda}{=}} \alpha + (\beta + \lambda).\end{aligned}$$

   Somit ist $\lambda \in Z$.

Nach dem Satz über die transfinite Induktion gilt nun $Z = \delta$. Da dies für beliebig große Ordinalzahlen δ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

(b)

Behauptung. Für alle Ordinalzahlen $\beta \leq \alpha$ gibt es ein eindeutiges γ mit $\alpha = \beta + \gamma$.

Beweis. Die Eindeutigkeit folgt direkt aus (c). Seien β, γ und γ' Ordinalzahlen mit $\gamma < \gamma'$. Dann gilt nach (b), dass $\beta + \gamma < \beta < \gamma'$.

Wir zeigen nun die Existenz durch transfinite Induktion nach α. Sei δ eine Ordinalzahl und $Z := \{\alpha \in \delta : \forall \beta \leq \alpha \exists \gamma (\alpha = \beta + \gamma)\}$.

1. Es gilt $0 = 0 + 0$ und so $0 \in Z$.

2. Sei $\alpha \in Z$ und $\beta \leq S(\alpha)$. Dann gilt entweder $\beta < \alpha$, $\beta = \alpha$ oder $\beta = S(\alpha)$. Die letzten beiden Fälle sind klar (wähle $\gamma = 1$ oder $\gamma = 0$). Im ersten Fall gibt es ein γ' sodass $\alpha = \beta + \gamma'$ ist. Sei $\gamma = S(\gamma')$. Dann gilt

   $$\beta + \gamma = \beta + S(\gamma') = S(\beta + \gamma') = S(\alpha).$$

   Somit gilt $S(\alpha) \in Z$.

3. Sei $\lambda < \delta$ eine Limeszahl mit $\lambda \subseteq Z$ und $\beta \leq \lambda$. Der Fall $\beta = \lambda$ ist klar. Also nehmen wir an, dass $\beta < \lambda$ ist. Dann gibt es Ordinalzahlen α mit $\beta < \alpha < \lambda$. Da $\lambda \subseteq Z$, gibt es für jedes solches α ein γ_α sodass $\alpha = \beta + \gamma_\alpha$ gilt. Sei $\gamma := \bigcup\{\gamma_\alpha : \beta < \alpha < \lambda\}$. Dann ist γ eine Limeszahl und es gilt

   $$\beta + \gamma = \bigcup\{\beta + \alpha : \alpha < \gamma\} = \bigcup\{\beta + \gamma_\alpha : \beta < \alpha < \lambda\} = \bigcup\{\alpha : \beta < \alpha < \lambda\} = \lambda.$$

   Somit gilt $\lambda \in Z$.

Nach dem Satz über die transfinite Induktion gilt nun $Z = \delta$. Da dies für beliebig große Ordinalzahlen δ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

(d)

Behauptung. Für alle Ordinalzahlen α, β und γ mit $\alpha < \beta$ gilt $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch transfinite Induktion nach γ. Sei δ eine Ordinalzahl und $Z := \{\gamma \in \delta : \forall \alpha, \beta(\alpha < \beta \to (\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma))\}$.

1. Es gilt $\alpha + 0 = \alpha < \beta = \beta + 0$ und somit $0 \in Z$.

2. Sei $\gamma \in Z$. Dann gilt

   $$\alpha + S(\gamma) = S(\alpha + \gamma) \overset{\gamma \in Z}{\leq} S(\beta + \gamma) = \beta + S(\gamma).$$

   Somit gilt $S(\gamma) \in Z$.

3. Sei $\lambda < \delta$ eine Limeszahl mit $\lambda \subseteq Z$. Dann gilt für alle $\gamma < \lambda$, $\alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$. Somit gilt

   $$\alpha + \lambda = \bigcup\{\alpha + \gamma : \gamma < \lambda\} \leq \bigcup\{\beta + \gamma : \gamma < \lambda\} = \beta + \lambda.$$

   Somit gilt $\lambda \in Z$.

Nach dem Satz über die transfinite Induktion gilt nun $Z = \delta$. Da dies für beliebig große Ordinalzahlen δ gilt, folgt die Behauptung. $\square$

Hausaufgabe 10.2.

(i) Sei F normale Ord'op.

<u>Beh.</u>: F hat Fixpkt. $\varkappa$.

<u>Beweis</u> (*) <u>Beh.</u>: $\forall \gamma$ Ord γ: $F(\gamma) \geq \gamma$.

$\ulcorner$ Ang.: $\exists \gamma$: $F(\gamma) < \gamma$.

Dann

$\llcorner$ $\ldots \overset{(b)}{<} F(F(\gamma)) \overset{(b)}{<} F(\gamma) \overset{Vor}{<} \gamma$. $\lightning$ (γ Wohlord)

Def

$$\varkappa := \bigcup \{ \overbrace{F^n}^{= \overbrace{F \circ \_ \circ F}^{n\text{-mal}}}(0) \ ; \ n \in \mathbb{N} \}.$$

OE: 0 kein Fixpkt., insb. $\underbrace{0 < F(0) \overset{(b)}{<} F^2(0) \overset{(b)}{<} \ldots}_{(+)}$

Z.z.: $F(\varkappa) = \varkappa$.

"$\geq$": $F(\varkappa) \overset{(*)}{\geq} \varkappa$ ✓

"$\subseteq$": $\varkappa$ ist Lim.:

$\ulcorner$ Z.z.: $\varkappa$ hat kein Max.

$x \in \varkappa \Rightarrow x \in F^n(0)$

$\llcorner \Rightarrow S(x) \in S(F^n(0)) \overset{(+)}{\subseteq} F^{n+1}(0) \subseteq \varkappa$.

$x \in F(\varkappa) \overset{(c)}{=} \bigcup \{ F(\xi) ; \xi \in \varkappa \}$

$\Rightarrow x \in F(\xi)$ für $\xi \in \varkappa$ (d.h. $\xi \in F^n(0)$)

$\Rightarrow x \in F(\xi) \overset{(b)}{\in} F(F^n(0)) = F^{n+1}(0)$

$\Rightarrow x \in F^{n+1}(0) \subseteq \varkappa$. $\square$

(ii) Def

$\Phi(x,y) :\Leftrightarrow (x \text{ Ord'g und } y = \aleph_x)$
$\vee$
$(x \neg \text{Ord'g und } y = x)$.

Dann für Ord'zen α

$F(\alpha) = \aleph_\alpha$.

Beh.: $\exists \varkappa$ Kard'g: $F(\varkappa) = \varkappa$.

Beweis: (a), (b), (c) gelten nach VL.
Setze $\varkappa$ als einen Fixpkt von F.
Dann $\varkappa = \aleph_\varkappa$ und $\aleph'_\varkappa$ ist Kard'g. □

Hausaufgabe 10.3.

H10.3 $(\beta,\gamma) r (\beta',\gamma') \quad :\leftrightarrow$
(1) $\max\{\beta,\gamma\} < \max\{\beta',\gamma'\}$ oder
(2) $(\max\{\beta,\gamma\} = \max\{\beta',\gamma'\}$ und $(\beta < \beta' \vee (\beta = \beta' \wedge \gamma < \gamma')))$.

(α) r ist *irreflexiv*, d. h. es gibt kein u mit uru;
(β) r ist *transitiv*, d. h. für alle u, v, w mit urv und vrw ist urw;
(γ) r ist *konnex über* a, d. h. für je zwei Elemente u und v von a gilt urv oder $u = v$ oder vru, d. h. je zwei Elemente von a sind bzgl. r *vergleichbar*.

Beh: Dies ist Ordnung i. S. von <.

Bew: (α) Sei $(\beta,\gamma) \in (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ bel.
Dann ist $\max\{\beta,\gamma\} = \max\{\beta,\gamma\}$. Also nicht (1).
Auch nicht (2), da $\beta = \beta$ und $\gamma = \gamma$.
(β) Sei $(\beta_1,\gamma_1), (\beta_2,\gamma_2), (\beta_3,\gamma_3) \in (\aleph_\alpha \times \aleph_\alpha, r)$ bel. mit
$(\beta_1,\gamma_1) r (\beta_2,\gamma_2)$ und $(\beta_2,\gamma_2) r (\beta_3,\gamma_3)$.
Fall 1: $\max\{\beta_1,\gamma_1\} < \max\{\beta_2,\gamma_2\}$.
Dann auch $\max\{\beta_1,\gamma_1\} < \max\{\beta_3,\gamma_3\}$
Fall 2: $\max\{\beta_1,\gamma_1\} = \max\{\beta_2,\gamma_2\}$
(i) Falls $\max\{\beta_2,\gamma_2\} < \max\{\beta_3,\gamma_3\}$ ✓
(ii) auch $\max\{\beta_2,\gamma_2\} = \max\{\beta_3,\gamma_3\}$
(ii. i) $\beta_1 < \beta_2 \Rightarrow \beta_1 < \beta_3$ ✓

(ii.i) $\beta_1 = \beta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2$ und $\beta_2 < \beta_3$, so $\beta_1 < \beta_3$ ✓

(ii.ii) $\beta_1 = \beta_2 \wedge \gamma_1 < \gamma_2$ und $\beta_2 = \beta_3 \wedge \gamma_2 < \gamma_3$, so $\beta_1 = \beta_3, \gamma_1 < \gamma_3$ ✓

(γ) Seien $(\beta_1, \gamma_1), (\beta_2, \gamma_2) \in (\aleph_2 \times \aleph_2, r)$ bel.

Fall 1: $\beta_1 = \beta_2, \gamma_1 = \gamma_2$: $(\beta_1, \gamma_1) = (\beta_2, \gamma_2)$

Fall 2: $\max\{\beta_1, \gamma_1\} < \max\{\beta_2, \gamma_2\}$: $(\beta_1, \gamma_1) r (\beta_2, \gamma_2)$

Fall 3: $\max\{\beta_2, \gamma_2\} > \max\{\beta_1, \gamma_1\}$: $(\beta_2, \gamma_2) r (\beta_1, \gamma_1)$.

Fall 4: $\max\{\beta_1, \gamma_1\} = \max\{\beta_2, \gamma_2\}$

(i) $\beta_1 < \beta_2$: $(\beta_1, \gamma_1) r (\beta_2, \gamma_2)$

(ii) $\beta_2 < \beta_1$: $(\beta_2, \gamma_2) r (\beta_1, \gamma_1)$

(iii) $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 < \gamma_2$: $(\beta_1, \gamma_1) r (\beta_2, \gamma_2)$

(iv) $\beta_1 = \beta_2$, $\gamma_1 > \gamma_2$: $(\beta_2, \gamma_2) r (\beta_1, \gamma_1)$ □

Behauptung. Es gelten $f(\omega) = (0, \omega)$, $f(\omega \cdot 2 + 1) = (\omega, 1)$ und $f(\omega \cdot 3 + 2) = (1, \omega + 1)$.

Beweis. Da f ein Isomorphismus ist, muss $f(\omega)$ das kleinste Paar ungleich $(0,0)$ sein welches keinen direkten Vorgänger bezüglich r hat. Wir zeigen, dass $(0, \omega)$ dieses Paar ist. Sei $(\beta, \gamma) r (0, \omega)$. Dann muss $\beta, \gamma \in \omega$ gelten. Weiter gilt $(\beta, \gamma) r (\beta, \gamma + 1) r (0, \omega)$. Somit hat $(0, \omega)$ keinen direkten Vorgänger bezüglich r. Sei nun $(\beta, \gamma) r (0, \omega)$ mit $(\beta, \gamma) \neq (0, 0)$. Wir machen eine Fallunterscheidung:

Fall 1: $\beta \geq \gamma$ und $\gamma \neq 0$. Dann ist $(\beta, \gamma - 1)$ der direkte Vorgänger von (β, γ) bezüglich r ($\gamma - 1$ ist wohldefiniert, da $\gamma \in \omega$ und $\gamma \neq 0$).

Fall 2: $\beta \geq \gamma$ und $\gamma = 0$. Dann ist $(\beta - 1, \beta)$ der direkte Vorgänger von (β, γ) bezüglich r ($\beta - 1$ ist wohldefiniert, da $\beta \in \omega$ und $\beta \neq 0$).

Fall 3: $\beta < \gamma$ und $\beta \neq 0$. Dann ist $(\beta - 1, \gamma)$ der direkte Vorgänger von (β, γ) bezüglich r ($\beta - 1$ ist wohldefiniert, da $\beta \in \omega$ und $\beta \neq 0$).

Fall 4: $\beta < \gamma$ und $\beta = 0$. Dann ist $(\gamma - 1, \gamma - 1)$ der direkte Vorgänger von (β, γ) bezüglich r ($\gamma - 1$ ist wohldefiniert, da $\gamma \in \omega$ und $\gamma \neq 0$).

Also hat (β, γ) in jedem Fall einen direkten Vorgänger bezüglich r. Somit ist $(0, \omega)$ das kleinste Paar ungleich $(0, 0)$ sein welches keinen direkten Vorgänger bezüglich r hat und so gilt $f(\omega) = (0, \omega)$.

Analog kann man zeigen, dass $f(\omega \cdot 2) = (\omega, 0)$ und $f(\omega \cdot 3) = (\omega, \omega)$ gelten. Somit gelten auch $f(\omega \cdot 2 + 1) = (\omega, 1)$ und $f(\omega \cdot 3 + 2) = (1, \omega + 1)$. □