Studentische Lösungen zum Übungsblatt 1

Hier finden sich gute bis sehr gute Lösungen zu den Aufgaben, die von Studierenden abgegeben wurden. Die Autorinnen und Autoren der Lösungen haben zugestimmt, dass sie an dieser Stelle zur Verfügung gestellt werden.

Hausaufgabe 1.1.

Sei $\mathbb{A}$ Das Alphabet mit einem einzigen Symbol $\bullet$. Eine Zeichenreihe über $\mathbb{A}$ heiße *Basiskette*, falls sie entweder zwei Elemente hat oder die Anzahl ihrer Elemente ein Vielfaches von elf ist. Wir definieren rekursiv den Begriff *chinesische Kette*: jede Basiskette ist chinesisch und falls s und t chinesische Ketten sind, so ist auch st eine chinesische Kette (wobei Hintereinanderschreibung die Verkettung zweier Folgen bezeichnet). Schreibe $(K1)$ für: Jede Basiskette ist chinesisch. Und schreibe $(K2)$ für: Falls s und t chinesisch sind, so ist st chinesisch.

(a)

Behauptung: $\bullet\bullet\bullet\bullet$ und $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ sind chinesische Ketten, aber keine Basisketten.
Beweis: Ich zeige zunächst $\bullet\bullet\bullet\bullet$ ist chinesisch per Kettenableitung.

1. $\bullet\bullet(K1)$
2. $\bullet\bullet\bullet\bullet(K2)$ auf 1 und 1

Ähnlich für $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$:

1. $\bullet\bullet(K1)$
2. $\bullet\bullet\bullet\bullet(K2)$ auf 1 und 1
3. $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ $(K2)$ auf 1 und 2

Es bleibt zu zeigen, dass $\bullet\bullet\bullet\bullet$ und $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ keine Basisketten sind. $\bullet\bullet\bullet\bullet$ hat 4 Elemente. $4 \neq 2$ und $4 \neq 11n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\bullet\bullet\bullet\bullet$ keine Basiskette. Weiterhin hat $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ 6 Elemente und es gilt $6 \neq 2$ und $6 \neq 11n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet$ keine Basiskette. □

(b)

Behauptung: $\bullet$ und $\bullet\bullet\bullet$ sind nicht chinesisch.
Beweis: Da $\mathbb{A}$ aus nur einem Symbol besteht, ist eine Zeichenfolge von Symbolen aus $\mathbb{A}$ eindeutig durch ihre Länge bestimmt. Ich zeige per Induktion über den Kettenaufbau, dass für alle chinesischen Ketten k gilt, dass die Länge von k ungleich 1 ist. Mit (K1) können Ketten der Längen 2 und $11n$ mit $n \in \mathbb{N}$ erzeugt werden. Es gilt $2 \neq 1$ und es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $11n = 1$. Seien k und k' chinesische Ketten mit Längen ungleich 1. Dann gilt, dass kk' nicht die Länge 1 haben kann. Da die Länge der Zeichenkette immer eine natürliche Zahl ist, wären die einzigen Möglichkeiten dafür, dass die Länge von kk' 1 ist, dass $k = 0, k' = 1$ oder umgekehrt. Da k und k' per Annahme ungleich 1 sind, folgt die Behauptung.

Ich zeige nun per Induktion über den Kettenaufbau, dass für alle chinesischen Ketten k gilt, dass die Länge vom k ungleich 3 ist. Mit (K1) können Ketten der Längen 2 und $11n$ mit $n \in \mathbb{N}$ erzeugt werden. Es gilt $2 \neq 3$ und es gibt kein $n \in \mathbb{N}$, so dass $11n = 3$. Seien k und k' chinesische Ketten mit Längen ungleich 3. Dann gilt, dass kk' nicht die Länge 3 haben kann. Da die Länge der Zeichenkette immer eine natürliche Zahl ist, wären die einzigen Möglichkeiten dafür, dass die Länge von kk' 3 ist, dass $k = 0, k' = 1$ oder umgekehrt oder, dass $k = 2, k' = 1$ oder umgekehrt. Da k und k' ungleich 1 sind (voheriger Induktionsbeweis), und per Annahme k und k' ungleich 3 sind, folgt die Behauptung. □

(c)

Sei $A := \{k | k \in \mathbb{A}^* \text{ und Länge von } k \neq 1, 3, 5, 7, 9\}$.

Behauptung: A ist die Menge der chinesischen Ketten in $\mathbb{A}^*$.
Beweis: Nach voherigem Beweis sind Zeichenreihen k mit Länge von k ist 1 oder 3 nicht chinesische Ketten. Ein analoges Argument zeigt dies ebenfalls für 5,7 und 9. Zunächst zeige ich, dass alle Ketten mit der Länge n, wobei n eine gerade positive Zahl ist eine chinesische Kette ist.
Induktionsanfang: Nach (K1) ist die Zeichenreihe in $\mathbb{A}^*$ mit Länge 2 eine chinesische Kette.
Induktionshypothese: Die Zeichenreihe k mit Länge n sei eine chinesische Kette.
Induktionsschritt: k ist eine chinesische Kette. Nach $(K1)$ ist $\bullet\bullet$ eine chiensische Kette. Dann ist nach $(K2)$ $k \bullet \bullet$ eine chinesische Kette. Also ist die Zeichenreihe in $\mathcal{A}^*$ mit Länge $n+2$ ebenfalls eine chinesische Kette.
Es folgt, dass alle Zeichenreihe in $\mathcal{A}^*$ mit einer Zeichenlänge, die einer geraden positiven Zahl entspricht, chinesische Ketten sind.

Weiterhin ist nach $(K1)$ mit $n = 0$ die leere Zeichenreihe $\square$ eine chinesische Kette.

Letzlich sind auch Zeichenreihen in $\mathcal{A}^*$ mit einer Länge, die einer ungeraden Zahl größergleich 11 entspricht, chinesische Ketten. Ich zeige dies wieder induktiv.

Induktionsanfang: Die Zeichenreihe in $\mathcal{A}^*$ mit Länge 11 ist nach $(K1)$ mit $n = 1$ eine chinesische Kette.
Induktionshypothese: Die Zeichenreihe k in $\mathcal{A}^*$ mit Länge n ist eine chinesische Kette.
Induktionsschritt: k ist eine chinesische Kette. Nach $(K1)$ ist $\bullet\bullet$ eine chiensische Kette. Dann ist nach $(K2)$ $k \bullet \bullet$ eine chinesische Kette. Also ist die Zeichenreihe in $\mathcal{A}^*$ mit Länge $n+2$ ebenfalls eine chinesische Kette.
Es folgt, dass alle Zeichenreihe in $\mathcal{A}^*$ mit einer Zeichenlänge, die einer ungeraden Zahl größergleich 11 entspricht, chinesische Ketten sind.

Es folgt die Behauptung. $\square$

Hausaufgabe 1.2.

Sei S eine Symbolmenge.

Behauptung: Für jeden S-Ausdruck φ gilt $anz_{(}(\varphi) = anz_{)}(\varphi)$.

Beweis: Wir beweisen die Behauptung durch Induktion über den Formelaufbau.

(1) Seien t_1, t_2 beliebige S-Terme.

In der Vorlesung haben wir bereits gezeigt, dass alle S-Terme keine Klammern enthalten.

$\Rightarrow \quad anz_l(t_1 \equiv t_2) = anz_l(t_1) + anz_l(t_2) = 0$

$= anz_r(t_1) + anz_r(t_2) = anz_r(t_1 \equiv t_2)$.

(2) Seien $t_1, \dots, t_n$ beliebige S-Terme und R eine beliebige n-stellige Relation, dann gilt wie in (1)

$anz_l(Rt_1 \dots t_n) = \sum_{i=1}^{n} anz_l(t_i) = 0 = \sum_{i=1}^{n} anz_r(t_i) = anz_r(Rt_1 \dots t_n)$.

(3) Sei φ ein beliebiger S-Ausdruck mit $anz_l(\varphi) = anz_r(\varphi)$, so gilt $anz_l(\neg\varphi) = anz_l(\varphi) = anz_r(\varphi) = anz_r(\neg\varphi)$.

(4) Seien φ, ψ zwei beliebige S-Ausdrücke mit $anz_l(\varphi) = anz_r(\varphi)$ und $anz_l(\psi) = anz_r(\psi)$, dann gilt:

$$\begin{aligned} anz_l((\varphi \wedge \psi)) &= anz_l(\varphi) + anz_l(\psi) + 1 \\ &= anz_r(\varphi) + anz_r(\psi) + 1 \\ &= anz_r((\varphi \wedge \psi)). \end{aligned}$$

Für $\vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ folgt die Aussage analog.

(5) Sei φ ein beliebiger S-Ausdruck mit $anz_l(\varphi) = anz_r(\varphi)$ und x sei eine Variable, so gilt:

$anz_l(\forall x \varphi) = anz_l(\varphi) = anz_r(\varphi) = anz_r(\forall x \varphi)$

Für $\exists$ folgt die Aussage analog. $\square$

Hausaufgabe 1.3.

Sei $S = S_R \cup S_F \cup S_K$ die Symbolmenge mit $S_R := \emptyset$, $S_F := \{\dot{m}, \dot{a}\}$ und $S_K := \{\dot{e}\}$. Sei σ die Signatur mit $\sigma(\dot{m}) = \sigma(\dot{a}) = 2$. Wir interpretieren $\dot{m}$ als Mult., $\dot{a}$ als Add. und $\dot{e}$ als 1.

(1) Dann lässt sich der informelle Term

$$x^2 + 2x + 1$$

schreiben als

$$\dot{a}\dot{a}\dot{m}xx\dot{a}xx\dot{e}$$

(2) Die Ableitung für diesen Term im Termkalkül ist

1.	x	(T1')
2.	$\dot{e}$	(T2')
3.	$\dot{a}xx$	(T3') angewandt auf 1.
4.	$\dot{m}xx$	(T3') angewandt auf 1.
5.	$\dot{a}\dot{m}xx\dot{a}xx$	(T3') angewandt auf 3. & 4.
6.	$\dot{a}\dot{a}\dot{m}xx\dot{a}xx\dot{e}$	(T3') angewandt auf 2. & 5.