MUSTERKLAUSUR
SS 2021

HAUPTAUFGABE LOGIK

Eine Menge $X \subseteq A$ heißt S-definierbar über $\mathfrak{A}$ falls eine Formel $\varphi \in L^S$ existiert, die genau eine freie Variable x hat, so daß für alle $a \in A$ gilt

$$a \in X \iff \mathfrak{A}\frac{a}{x} \models \varphi. \quad (*)$$

Falls $\pi : A \longrightarrow A$ ein S-Automorphismus ist, so ist π insbesondere ein S-Isomorphismus von $\mathfrak{A}$ nach $\mathfrak{A}$. Nach dem Beweis des Isomorphielemmas (EFT 3.5.2) gilt dann für alle Formeln ψ und alle Interpretationen $\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$, daß

$$\begin{aligned} \mathfrak{I} \models \psi &\iff \mathfrak{I}^\pi \models \psi \\ &\iff (\mathfrak{A}, \beta^\pi) \models \psi \\ &\iff (\mathfrak{A}, \pi \circ \beta) \models \psi. \end{aligned}$$

Angewandt auf $(*)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} a \in X &\overset{(*)}{\iff} \mathfrak{A}\frac{a}{x} \models \varphi \\ &\iff \left(\mathfrak{A}\frac{a}{x}\right)^\pi \models \varphi \iff \mathfrak{A}\frac{\pi(a)}{x} \models \varphi \\ &\overset{(*)}{\iff} \pi(a) \in X \end{aligned}$$

Definierbare Mengen sind also invariant unter Automorphismen.

Ist nun $\pi: A \longrightarrow A$ ein nichttrivialer Automorphismus mit $\pi(a) \neq a$, so kann eine Menge X nicht S-definierbar sein, falls $a \in X$ und $\pi(a) \notin X$ oder umgekehrt.

<u>Konkretes Bsp.</u> Sei $S = \{\underline{0}, \underline{+}\}$ und $(\mathbb{Z}, 0, +)$ eine S-Struktur. Dann ist $\pi: \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : z \longmapsto -z$ ein nichttrivialer S-Automorphismus. Daraus folgt, daß z.B. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ nicht S-definierbar sein kann, da $1 \in \mathbb{N}$, aber $\pi(1) = -1 \notin \mathbb{N}$.

HAUPTAUFGABE MENGENLEHRE

Wir schreiben VP für das Vergleichsprinzip.
Das VP folgt unmittelbar aus dem Wohlordnungssatz, welcher äquivalent zu AC ist; somit ist VP eine Konsequenz des Auswahlaxioms.

[Argument für WOS $\Longrightarrow$ VP.
Nach dem Fundamentalsatz über Wohlordnungen sind je zwei Wohlordnungen vergleichbar im Sinne von VP (d.h. es gibt eine Inj. in mindestens eine Richtung). Der WOS liefert die Wohlordnungen auf x und y.]

Um zu zeigen, daß die Verwendung des Auswahlaxioms im Beweis notwendig ist, zeigen wir, daß VP den Wohlordnungssatz impliziert:

Sei x eine beliebige Menge. Nach dem Satz von Hartogs (VL XVIII, Seite 11) gibt es eine Ordinalzahl H_x, so daß keine Injektion von H_x nach x existiert.

Nach VP gibt es also eine Injektion

$f : X \longrightarrow H_X$.

Definiere $R \subseteq X \times X$ durch

$$y R z \;:\Longleftrightarrow\; f(y) \in f(z).$$

Dann ist f ein Isomorphismus zwischen

(X, R) und $(\text{Bild}(f), \in)$.

Aber $\text{Bild}(f) \subseteq H_X$ und somit ist

$(\text{Bild}(f), \in)$ wohlgeordnet.

$\Longrightarrow (X, R)$ ist Wohlordnung.

ZUSATZAUFGABE (1)

$$\mathfrak{Z} := (\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}, \in)$$

Man beachte, daß $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$ unendlich ist und daß jedes Element von $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$ maximal ein Element hat.

(a) Paarmenge. Seien $n \neq m \in \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$.
Das Paarmengenaxiom impliziert, daß es eine Menge mit mind. zwei Elementen (nämlich n und m) gibt. Dies ist in $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$ nicht der Fall.
$\longrightarrow$ $\boxed{\text{FALSCH}}$

(b) Potenzmenge. Falls eine Menge die Potenzmenge von x ist, so muß sie mindestens $\emptyset$ und x enthalten. Ist also $x \neq \emptyset$, so muß die Potenzmenge von x mindestens zwei Elemente enthalten. So etwas gibt es in $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$ nicht. $\longrightarrow$ $\boxed{\text{FALSCH}}$

(c) Großes Vereinigungsaxiom.

Wir schreiben n_Z für die Zermelo-zahl n.

Dann gilt offensichtlich

$$\bigcup 0_Z = \bigcup \emptyset = \emptyset = 0_Z .$$

und

$$\bigcup n{+}1_Z = \bigcup \{n_Z\} = n_Z$$

Also gibt es für jede Menge die große Vereinigung. $\longrightarrow$ WAHR.

(d) Aussonderungsaxiom.

Da jede Menge höchstens einelementig ist, gibt es maximal zwei verschiedene Teilmengen von x : $\emptyset$ und x.

Jede Anwendung des Aussonderungsaxioms auf x produziert eine TM von x.

Also falls $x \in \mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$, so sind beide diese TM in $\mathbb{N}_{\text{Zermelo}}$.

$\longrightarrow$ WAHR.

ZUSATZAUFGABE (2)

Für Ordinalzahlen γ, δ gilt: $\gamma < \delta$ oder $\gamma = \delta$ oder $\delta < \gamma$.

Wir zeigen die Beh. durch Kontraposition und verwenden die folgenden Rechenregeln:

(H10.1)

1. Assoziativität $(\gamma+\delta)+\varepsilon = \gamma+(\delta+\varepsilon)$
2. Strikte Monotonie:
$$\gamma < \delta \implies \varepsilon+\gamma < \varepsilon+\delta$$
3. Schwache Monotonie:
$$\gamma < \delta \implies \gamma+\varepsilon \leq \delta+\varepsilon$$

Falls $\alpha+\beta \neq \beta+\alpha$, so ist entweder $\alpha+\beta < \beta+\alpha$ oder $\beta+\alpha < \alpha+\beta$.

[Wg. Symmetrie brauchen wir nur eine Richtung zu rechnen; die andere folgt durch Vertauschung der Rollen von α, β.]

$$\begin{aligned}
\boxed{\alpha+\underbrace{\alpha+\beta}+\beta} &\leq \alpha+(\beta+\alpha)+\beta \\
&= \alpha+\beta+(\alpha+\beta) \\
&\boxed{<} \alpha+\beta+(\beta+\alpha) \\
&\leq \beta+\alpha+(\beta+\alpha) \\
&= \beta+(\alpha+\beta)+\alpha \\
&\leq \beta+(\beta+\alpha)+\alpha = \boxed{\beta+\beta+\alpha+\alpha}
\end{aligned}$$

Zusatzaufgabe (3)

Sei $S = \{1, \cdot\}$ die Symbolmenge der Gruppentheorie und c ein zusätzliches Konstantensymbol.
Setze $S^* = \{1, \cdot, c\}$. Sei Φ die Menge der Gruppenaxiome und

$$\psi_n := \neg \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{n\text{-mal}} \equiv 1$$

sowie

$$\varphi_m := \psi_1 \wedge \psi_2 \wedge \ldots \wedge \psi_m .$$

Die Formel φ_m drückt aus, daß die Konstante c Ordnung $> m$ hat.

Setze $\Phi^* := \Phi \cup \{\varphi_m ; m \in \mathbb{N}\}$.

Diese Menge axiomatisiert die Gruppen, in denen c durch ein infinitäres Element interpretiert wird. Insbesondere gilt:

$(G, 1, \cdot)$ infinitär $\Longleftrightarrow$ es ex. $g \in G$ $(G, 1, \cdot, g) \models \Phi^*$.

Ang. Φ sei eine S-Axiomatisierung der infinitären Gruppen.

Dann gilt $(G, 1, \cdot, g) \models \Phi^*$

$$\Longrightarrow (G, 1, \cdot) \models \Phi.$$

Nach dem Kompaktheitssatz gibt es für jedes $\varphi \in \Phi$ eine endliche TM $\Phi_0^* \subseteq \Phi^*$, so daß $\Phi_0^* \models \varphi$.

Sei $\mathcal{H}$ die Gruppe im Hinweis; für eine solche endliche TM Φ_0^* ex. ein g, so daß

$$(\mathcal{H}, g) \models \Phi_0^*, \text{ also}$$

$$(\mathcal{H}, g) \models \varphi.$$

Da $\varphi \in L^S$ gilt (nach dem Koinzidenzlemma)

$$\mathcal{H} \models \varphi.$$

Aber φ war beliebig, also gilt $\mathcal{H} \models \Phi$.
Aber im Hinweis stand, daß $\mathcal{H}$ nicht infinitär ist.
Widerspruch!