Mathematische Logik & Mengenlehre

MLML

LETZTE VORLESUNG & FÜNFUNDZWANZIGSTE

XXV

8. Juli 2021

Gentzenscher Sequenzenkalkül $\mathfrak{K}$

Bereits bewiesen: $\mathfrak{K}$ ist korrekt (VL XXIII) ✓

◁ Gödelscher Vollständigkeitssatz:

$$\Phi \models \varphi \Longrightarrow \Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$$

Äquivalent (VL XXIV):

Φ widerspruchsfrei $\Longrightarrow$ Φ erfüllbar

Leon HENKIN (1921–2006)

Henkins Idee

Das Termmodell $\mathfrak{I}^{\Phi}$

DieTerminterpretation $\mathfrak{I}^{\Phi}$

Definition 5.1.8

Φ heiße NEGATIONSTREU falls für jedes φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

ZEUGEN

Φ enthält Beispiele falls für jeden Ausdruck der Form $\exists x \varphi$ ein Term existiert mit $\Phi \vdash \exists x \varphi \to \varphi\frac{t}{x}$

Φ heißt HENKINMENGE falls Φ widerspruchsfrei und negationstreu ist und Bsp. enthält

Im Folgenden sei Φ eine Menge von Ausdrücken. Wir definieren nun eine Interpretation $\mathfrak{I}^\Phi = (\mathfrak{T}^\Phi, \beta^\Phi)$. Hierzu erklären wir zunächst auf der Menge T^S der S-Terme eine zweistellige Relation $\sim$ durch

5.1.1 $t_1 \sim t_2$:gdw $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$.

5.1.2 Lemma (a) $\sim$ *ist eine Äquivalenzrelation.*
(b) $\sim$ *ist im folgenden Sinne mit den Symbolen aus S verträglich:*
Wenn $t_1 \sim t'_1, \ldots, t_n \sim t'_n$, so gilt für n-stelliges $f \in S$

$$ft_1 \ldots t_n \sim ft'_1 \ldots t'_n$$

und für n-stelliges $R \in S$

$$\Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n \quad gdw \quad \Phi \vdash Rt'_1 \ldots t'_n.$$

Der *Beweis* ergibt sich leicht mit der Regel ($\equiv$) und 4.5.3, 4.5.4. Wir zeigen das hier exemplarisch in zwei Fällen.

(1) $\sim$ ist symmetrisch: Sei $t_1 \sim t_2$, also $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$. Nach 4.5.3(a) gilt dann $\Phi \vdash t_2 \equiv t_1$, d.h. $t_2 \sim t_1$.

(2) f sei ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, und es sei $t_1 \sim t'_1, \ldots, t_n \sim t'_n$, d.h. $\Phi \vdash t_1 \equiv t'_1, \ldots, \Phi \vdash t_n \equiv t'_n$. Nach 4.5.4(b) gilt dann $\Phi \vdash ft_1 \ldots t_n \equiv ft'_1 \ldots t'_n$, d.h. $ft_1 \ldots t_n \sim ft'_1 \ldots t'_n$. ⊣

Es sei $\bar{t}$ die Äquivalenzklasse von t:

$$\bar{t} := \{t' \in T^S \mid t \sim t'\},$$

und T^Φ (statt genauer $T^{\Phi,S}$) die Menge der Äquivalenzklassen:

$$T^\Phi := \{\bar{t} \mid t \in T^S\}.$$

T^Φ ist nicht leer. Über T^Φ definieren wir die S-Struktur $\mathfrak{T}^\Phi$, die sog. *Termstruktur* zu Φ, durch die folgenden Festsetzungen:

5.1.3 *Für n-stelliges $R \in S$:*

$$R^{\mathfrak{T}^\Phi}\bar{t}_1 \ldots \bar{t}_n \ :gdw\ \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n.$$

5.1.4 *Für n-stelliges $f \in S$:*

$$f^{\mathfrak{T}^\Phi}(\bar{t}_1, \ldots, \bar{t}_n) := \overline{ft_1 \ldots t_n}.$$

5.1.5 *Für $c \in S$:* $c^{\mathfrak{T}^\Phi} := \bar{c}$.

<u>Theorem</u> (Henkins Lemma)
Falls Φ eine Henkinmenge ist, so gilt ✓

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \Phi.$$

<u>Theorem</u> Falls Φ widerspruchsfrei ist, so ex. $\Phi^* \supseteq \Phi$ mit Φ^* ist eine Henkinmenge.

5.1.7 Lemma (a) *Für alle t ist* $\mathfrak{I}^\Phi(t) = \bar{t}$.
(b) *Für alle atomaren Ausdrücke φ gilt:*

$$\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \quad gdw \quad \Phi \vdash \varphi.$$

(c) *Für alle Ausdrücke φ und paarweise verschiedenen Variablen $x_1, \ldots, x_n$ gilt:*
(i) $\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ *gdw es gibt* $t_1, \ldots, t_n \in T^S$ *mit* $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$.
(ii) $\mathfrak{I}^\Phi \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ *gdw für alle Terme* $t_1, \ldots, t_n \in T^S$ *gilt* $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi\frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$.

Henkinmenge

5.1.9 Lemma *Φ sei widerspruchsfrei, negationstreu und enthalte Beispiele. Dann gilt für alle φ, ψ:*
(a) $\Phi \vdash \varphi$ *gdw nicht* $\Phi \vdash \neg\varphi$.
(b) $\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)$ *gdw* $\Phi \vdash \varphi$ *oder* $\Phi \vdash \psi$.
(c) $\Phi \vdash \exists x \varphi$ *gdw es gibt einen Term t mit* $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

<u>Beweis</u> (a) "$\Rightarrow$" $\Phi \vdash \varphi$, so kann wg. der Widerspruchsfreiheit nicht gelten $\Phi \vdash \neg\varphi$.
"$\Leftarrow$" Ang. $\Phi \nvdash \varphi$ und $\Phi \nvdash \neg\varphi$. Dann Widerspruch zur Negationstreue.

(b) $\boxed{\Phi \vdash (\varphi \vee \psi)} \Longleftrightarrow \Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \psi$.

"$\Longrightarrow$" Ang. $\Phi \nvdash \varphi$ und $\Phi \nvdash \psi$.

$\xRightarrow{\text{Neg. treu}}$ $\boxed{\Phi \vdash \neg\varphi}$ und $\boxed{\Phi \vdash \neg\psi}$.

Ableitbare Regel 4.3.4 impliziert

$$\Phi \vdash (\varphi \vee \psi) \ \& \ \Phi \vdash \neg\varphi$$

$$\Longrightarrow \Phi \vdash \psi.$$

$\boxed{\Phi \vdash \psi}$ $\longrightarrow$ Widerspruch zur Widerspruchsfreiheit.

"$\Longleftarrow$" Wir erinnern uns an $(\vee S)$:

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)} \qquad \frac{\Gamma \quad \psi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}$$

Daraus folgt die Beh. unmittelbar.

(c) $\Phi \vdash \exists x \varphi \Longleftrightarrow$ ex. $t \in T^S$ mit $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$.

"$\Longrightarrow$" Da Φ Beisp. enthält, ex. ein Term $t \in T^S$ mit $\Phi \vdash \exists x \varphi \to \varphi\frac{t}{x}$.

Ableitbare Regel MODUS PONENS

$$\begin{array}{ll} \Gamma & (\varphi \to \psi) \\ \Gamma & \varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array} \qquad \Longrightarrow \Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$$

"$\Leftarrow$": Ang. $\Phi \vdash \varphi\frac{t}{x}$

Wir erinnern uns an ($\exists$S):

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x \varphi}$$

Daraus folgt die Beh. unmittelbar.

q.e.d. (5.1.9)

SATZ VON HENKIN

Sei Φ eine Henkinmenge. Dann gilt für alle $\varphi \in L^S$

$$\Phi \vdash \varphi \iff \mathfrak{J}^{\Phi} \models \varphi.$$

Insbesondere: Jede Henkinmenge ist erfüllbar (nämlich durch ihre Terminterpretation).

Beweis Induktion nach der Anzahl der in φ vorkommenden nichtlogischen Symbole:

$\vee, \neg, \exists$

$LS(\varphi) :=$ die Anzahl der Vorkommnisse von $\vee, \neg, \exists$.

Induktion nach $LS(\varphi)$ ..

Falls $LS(\varphi) = 0$, so ist φ eine atomare Formel. Wir hatten in VL XXIV gezeigt, daß für φ atomar gilt

$$\Phi \vdash \varphi \iff \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi .$$

Induktionsschritt. Angenommen für alle ψ mit $LS(\psi) < LS(\varphi)$ ist die Beh. gezeigt:

$$\Phi \vdash \psi \iff \mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi .$$

Zeige die Beh. für φ.

Drei Fälle

$\varphi = \neg\psi$ Fall 1 5.1.9a

$\varphi = (\psi \vee \chi)$ Fall 2 5.1.9b

$\varphi = \exists x \psi$ Fall 3 5.1.9c

Alle drei Fälle führen wir direkt auf Lemma 5.1.9 zurück.

Fall 1

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \neg\psi \overset{\text{Def}}{\iff} \mathfrak{I}^{\Phi} \not\models \psi \overset{\text{IV}}{\iff} \Phi \nvdash \psi \overset{\text{Neg. treu}}{\iff} \Phi \vdash \neg\psi \quad 5.1.9a$$

Fall 2 Hausaufgabe (benutzt 5.1.9b).

<u>Fall 3</u> $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \exists x\, \psi$

$\overset{5.1.7c}{\iff}$ ex. $t \in T^S$ $\mathfrak{I}^{\Phi} \models \psi\frac{t}{x}$

$\left[LS(\psi\frac{t}{x}) = LS(\psi) = LS(\exists x \psi) - 1 < LS(\varphi) \right]$

$\overset{IV}{\iff}$ ex. $t \in T^S$ $\Phi \vdash \psi\frac{t}{x}$

$\underset{5.1.9c}{\iff}$ $\Phi \vdash \exists x \psi$.

q.e.d.

<u>THEOREM</u> Gödelscher Vollständigkeitssatz (1. Formulierung)

Sei S eine abzählbare Symbolmenge.
Sei Φ eine Menge von <u>S-Sätzen</u>.

Dann gilt: falls Φ widerspruchsfrei ist, so ist Φ erfüllbar.

Beweis

Strategie Zeige:

Falls Φ widerspruchsfrei, so ex.

(*) $\Phi^* \supseteq \Phi$ Henkin.

Daraus folgt nach dem Satz von Henkin die Behauptung.

[Denn dann $\mathfrak{I}^{\Phi^*} \models \Phi^*$

$\Rightarrow \mathfrak{I}^{\Phi^*} \models \Phi$.]

Beweis von (*).

1. Falls $\Phi \subseteq \Phi^*$ und Φ enthält Bsp., so auch Φ^*.

2. Falls $\Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots \subseteq \Phi_i \subseteq \Phi_{i+1} \subseteq \ldots$

so daß alle Φ_i widerspruchsfrei,

so $\boxed{\bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i}$ widerspruchsfrei.

[Folgt direkt aus der Endlichkeit des Kalküls.]

3. Falls Φ widerspruchsfrei, so finden wir mit (H12.3) eine maximalkonsistente Obermenge $\Phi^* \supseteq \Phi$.

(H12.3) Sei S eine beliebige Symbolmenge (möglicherweise überabzählbar) und L_0^S die Menge der S-Sätze. Eine Menge $\Psi \subseteq L_0^S$ heißt *maximalkonsistent*, falls sie widerspruchsfrei ist und keine echten widerspruchsfreien Obermengen hat.

Zeigen Sie (unter Verwendung des Auswahlaxioms), daß jede widerspruchsfreie Menge Φ eine maximalkonsistente Obermenge $\Psi \supseteq \Phi$ hat. Finden Sie einen Beweis, welcher das Zornsche Lemma verwendet und einen anderen, welcher den Wohlordnungssatz verwendet.

Wie können Sie die Verwendung des Auswahlaxioms verhindern, wenn Sie wissen, daß S abzählbar ist?

Falls S abzählbar ist, so braucht man AC nicht.

Beh. Φ^* ist negationstreu:

[Ang. nicht $\underbrace{\Phi^* \nvdash \varphi}_{(*)}$ und $\underbrace{\Phi^* \nvdash \neg\varphi}_{(*)}$ für ein φ.

Insbesondere gilt $\varphi, \neg\varphi \notin \Phi^*$.

D.h. $\Phi^* \cup \{\varphi\} \supsetneq \Phi^*$

$\boxed{\Phi^* \cup \{\neg\varphi\} \supsetneq \Phi^*.}$

Aber (vgl. VL XXIV): aus (*) folgt

$\boxed{\Phi^* \cup \{\neg\varphi\}}$ und $\Phi^* \cup \{\neg\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei sind.

Widerspruch zur Maximalität von Φ^*.]

4. Nach 1. und 3. :
Falls wir eine Obermenge finden, die widerspruchsfrei ist und Bsp. enthält, so finden wir eine Henkinobermenge.

5. Da S abzählbar ist, ist L^S abzählbar und damit auch

$$E := \{ \exists x \varphi \,;\, x \text{ ist Variable}, \varphi \in L^S \},$$

Wir schreiben also

$$E = \{ \eta_i \,;\, i \in \mathbb{N} \}$$

mit $\eta_i = \exists x_i \varphi_i$.

6. Wir definieren rekursiv.

$$\Phi_0 := \Phi$$

$$\Phi_{i+1} := \Phi_i \cup \{ \psi_i \}$$

wobei ψ_i das ~~Enthalten~~ von Bsp. für die Formel η_i bezeugt.

$$\underbrace{\exists x_i \varphi_i}_{\eta_i} \longrightarrow \varphi_i \frac{v}{x_i}$$

v geeignet gewählt.

$$\eta_i = \exists x_i \varphi_i$$

$$\psi_i := \boxed{\exists x_i \varphi_i \longrightarrow \varphi_i \frac{v}{x_i}}$$

wobei v die Variable mit kleinsten Index ist, die nicht in ψ_k für $k<i$ und $\exists x_i \varphi_i$ frei vorkommt.

7. Wir stellen fest

$$\Phi = \Phi_0 \subseteq \Phi_1 \subseteq \Phi_2 \subseteq \ldots \Phi_i \subseteq \Phi_{i+1} \subseteq \ldots$$

D.h. $\Phi^* := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \Phi_i$

dann $\Phi^* \supseteq \Phi$ und Φ^* enthält (nach Konstruktion) Beispiele.

Nach 2. gilt: Φ^* widerspruchsfrei gdw für alle i Φ_i ist widerspruchsfrei.

8. Zusammenfassend: Der Gödelsche Vollständigkeitssatz ist bewiesen, wenn wir für jedes $i \in \mathbb{N}$ zeigen können: Φ_i ist widerspruchsfrei.

9. Beweis der Beh. in 8. per Induktion

$i = 0$; $\Phi_0 = \Phi$ widerspruchsfrei.

Ang. Φ_i sei widerspruchsfrei.

z.z. $\Phi_{i+1} = \Phi_i \cup \{ \psi_i \}$

$= \Phi_i \cup \{ \exists x_i \varphi_i \rightarrow \varphi_i \frac{v}{x_i} \}$

ist widerspruchsfrei.

Zeigen dies in der Form:

falls Φ_{i+1} explosiv, so Φ_i explosiv.

Ang. $\Phi_{i+1} \vdash \varphi$ für alle φ.

D.h. es ex. Γ mit Gliedern in Φ_i

mit $\Gamma \; \psi_i \; \varphi$ ableitbar.

$$\boxed{\Gamma \quad \neg \exists x_i \varphi_i \vee \varphi_i \frac{v}{x_i} \quad \varphi}$$

Man beachte:
Um die Widersprüchlichkeit zu zeigen, müsten wir dies nur für Sätze φ zeigen.

Falls Ψ alle Sätze φ beweist, so insbesondere auch φ und $\neg\varphi$ und somit ist Ψ widersprüchlich.

1.	Γ	$\neg\exists x_i \varphi_i \vee \varphi_i \frac{v}{x_i}$	φ	
2.	Γ	$\neg\exists x_i \varphi_i$	$\neg\exists x_i \varphi_i$	(Vor)
3.	Γ	$\neg\exists x_i \varphi_i$	$\neg\exists x_i \varphi_i \vee \varphi_i \frac{v}{x_i}$	(VS)
4.	Γ	$\varphi_i \frac{v}{x_i}$	$\varphi_i \frac{v}{x_i}$	(Vor)
5.	Γ	$\varphi_i \frac{v}{x_i}$	$\neg\exists x_i \varphi_i \vee \varphi_i \frac{v}{x_i}$	(VS)
6.	Γ	$\neg\exists x_i \varphi_i$	φ	(KS) 1.+3.
7.	Γ	$\varphi_i \frac{v}{x_i}$	φ	(KS) 1.+5.

[v taucht nicht frei in Γ auf; angenommen φ sei auch ein Satz, dann ist v auch nicht frei in φ, ebenfalls nicht in φ_i]

8.	Γ	$\exists x_i \varphi_i$	φ	($\exists$A)
9.	Γ		φ	(FU) 6.+8.

q.e.d.
(Vollständigkeitssatz)

BEMERKUNGEN ZUM VOLLSTÄNDIGKEITSSATZ

(A) Der Vollständigkeitssatz war nur für Mengen von Sätzen formuliert.
Eigentlich benutzen wir stattdessen: es gibt unendlich viele Variable, die allesamt nicht in den Formeln von Φ auftauchen.

Also eigentlich haben wir gezeigt:
Falls Φ eine Formelmenge ist, so daß unendlich viele Variablen nicht frei in Φ vorkommen, dann gilt der Gödelsche Vollständigkeitssatz.

(B) Trick:
Sei Φ irgendeine Formelmenge.
Seien $\{v_i ; i \in I\}$ die in Φ auftretenden Variablen. Ersetzen Sie systematisch v_i durch v_{2i} und erhalten Sie Φ'.
Dann gilt: $\{v_{2i+1} ; i \in \mathbb{N}\}$ tauchen alle nicht in Φ' auf.

(C) Also erhalten wir die zweite Formulierung des Gödelschen Vollständigkeitssatzes:

Sei S abzählbar. Dann ist jede widerspruchsfreie Formelmenge erfüllbar.

(D) Was, wenn S überabzählbar ist. Dann reicht die Menge der Variablen nicht aus, um Bsp. hinzuzufügen und man muß die Sprache durch zusätzliche Konstanten erweitern.

$\longrightarrow$ §5.3 EFT.

(E) Ein unmittelbares Korollar zum Beweis:

<u>Theorem</u> (Satz von Löwenheim-Skolem)

Sei S abzählbar und Φ widerspruchsfrei. Dann hat Φ ein höchstens abzählbares Modell.

[Da S abzählbar ist, ist T^S abzählbar und somit

$$T^{\Phi} = T^S/_\sim$$

ebenfalls höchstens abzählbar.]

<u>Anwendung</u>:

Sei z.B. $(\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1) =: \mathfrak{R}$ der geordnete Körper der reellen Zahlen und

$$\Phi := \{\varphi \in L_0^S ; \mathfrak{R} \models \varphi\}$$

Φ ist erfüllbar, also widerspruchsfrei und hat somit nach LöSko ein abzählbares Modell

$$\mathfrak{A} := (A, +, \cdot, <, 0, 1).$$

Es gilt $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$ elementar äquivalent sind, d.h. f.a. Sätze φ

$$\mathfrak{A} \models \varphi \iff \mathfrak{R} \models \varphi.$$

Offensichtlich sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{R}$ nicht isomorph.

Das bedeutet:

Das Isomorphielemma kann nicht umgekehrt werden.

[IL: Isomorphe Strukturen sind elementare äquivalent.]

$\longrightarrow$ MODELLTHEORIE