Vierundzwanzigste Vorlesung – MLML XXIV

5. Juli 2021

Der GENTZENKALKÜL

EFT S. 72

(Ant) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$, falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 1

(Vor) $\dfrac{}{\Gamma \quad \varphi}$, falls $\varphi \in \Gamma$ 2

(FU) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{matrix}}{\Gamma \qquad \varphi}$ 3

(Wid) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{matrix}}{\Gamma \qquad \varphi}$ 4

($\vee$A) $\dfrac{\begin{matrix}\Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi\end{matrix}}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi) \quad \chi}$ 5

($\vee$S) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}$ 6, $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$ 7

($\exists$A) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}$, falls y nicht frei in $\Gamma \; \exists x\varphi \; \psi$ 8

($\exists$S) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$ 9

($\equiv$) $\dfrac{}{t \equiv t}$ 10

(Sub) $\dfrac{\Gamma \qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$ 11

Elf Regeln

ZIEL

Der Gentzenkalkül ist

KORREKT

$$\Phi \vdash \varphi \Rightarrow \Phi \models \varphi$$

VOLLSTÄNDIG

$$\boxed{\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi}$$

VORLESUNG XXIII: Korrektheitsbeweis ✓

In VL XXIII waren aus Versehen Regeln 6 & 7 ($\vee$S) "Oder-Introduktion im Sukzedens" vergessen worden.

ZIEL Gödelscher Vollständigkeitssatz

$$\Phi \models \varphi \Longrightarrow \Phi \vdash \varphi$$

für den Gentzenkalkül.

Ableitbare Regeln

Falls $\mathfrak{K}$ ein Kalkül ist und R eine n-stellige Regel (nicht notwendigerweise $R \in \mathfrak{K}$), so nennen wir R $\mathfrak{K}$-ableitbar

falls für alle $(S_1, \ldots, S_n, S) \in R$ gilt, falls f.a. $i \leq n$ gilt S_i ist $\mathfrak{K}$-ableitbar, so auch S.

Falls $\mathfrak{K}$ ein Kalkül, R $\mathfrak{K}$-ableitbar und $\mathfrak{K}^* := \mathfrak{K} \cup \{R\}$, so gilt für alle Φ, φ:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \iff \Phi \vdash_{\mathfrak{K}^*} \varphi.$$

D.h. insbesondere:

$\mathfrak{K}$ ist korrekt $\iff$ $\mathfrak{K}^*$ ist korrekt

und

$\mathfrak{K}$ ist vollständig $\iff$ $\mathfrak{K}^*$ ist vollständig

D.h.: Falls $\mathfrak{K}$ Kalkül und R ist $\mathfrak{K}$-ableitbar, so dürfen wir oBdA die Regel R in $\mathfrak{K}$-Ableitungen verwenden.

4.3.1 Modifizierte Widerspruchsregel (Wid')

$$\frac{\begin{array}{ll}\Gamma & \psi \\ \Gamma & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi\end{array}}$$

irgendwas beliebiges !

Erinnerung: (Wid)

$$\frac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\begin{array}{ll}\Gamma & \varphi\end{array}}$$

Wie zeigt man, daß eine Regel ableitbar ist:

Ableitung, bei der die Prämissen [in diesem Fall $\Gamma\psi$, $\Gamma\neg\psi$] auftauchen dürfen, danach verwenden wir nur die Regeln von $\mathfrak{S}$ bzw. Regeln, deren Ableitbarkeit wir bereits gezeigt haben und am Ende soll die Konklusion stehen [in diesem Falle $\Gamma\varphi$].

1.	Γ	ψ	Prämissen
2.	Γ	$\neg\psi$	Prämissen
3.	$\Gamma\neg\varphi$	ψ	(Ant) auf 1.
4.	$\Gamma\neg\varphi$	$\neg\psi$	(Ant) auf 2.
5.	Γ	φ	(Wid)

Bem. Jeder Kalkül, welcher (Ant) & (Wid) enthält, macht (Wid') ableitbar.

4.3.4

$$\begin{array}{ll} \Gamma & (\varphi \vee \psi) \\ \Gamma & \neg\varphi \\ \hline \Gamma & \psi \end{array}$$

[Oder-Elimination im Sukzedens]

unter Verwendung von (Wid') & (KS).

1.	Γ		$(\varphi \vee \psi)$	Prämissen
2.	Γ		$\neg\varphi$	
3.	Γ	φ	$\neg\varphi$	(Ant) auf 2
4.	Γ	φ	φ	(Vor)
5.	Γ	ψ	ψ	(Vor)
6.	Γ	φ	ψ	(Wid') auf 3. & 4.
7.	Γ	$(\varphi \vee \psi)$	ψ	($\vee$A) auf 5., 6.
8.	Γ		ψ	(KS) auf 1., 7.

$$[\quad \Gamma \quad \psi \quad]$$

($\vee$A)

$$\begin{array}{ll} \Gamma\ \varphi & \chi \\ \Gamma\ \psi & \chi \\ \hline \Gamma\ (\varphi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

4.3.2 Kettenschlussregel (KS)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & & \varphi \\ \Gamma & \varphi & \psi \\ \hline \Gamma & & \psi \end{array}$$

→ morgige Übung (GL3).

EFT: §4.3 & §4.5. viele abgeleitete Regeln im Sequenzenkalkül.

ANALYSE DER WIDERSPRÜCHLICHKEIT

Lemma 4.7.2 Für alle Φ sind äquivalent:

(i) Φ widersprüchlich

(ii) f.a. φ $\Phi \vdash \varphi$.

[EXPLOSIV]

Man sagt auch, Φ heiße explosiv falls Bed. (ii) gilt.

Beweis (ii) $\Rightarrow$ (i).

Falls (ii) gilt, so gilt für beliebiges ψ,

$$\Phi \vdash \psi \ \& \ \Phi \vdash \neg\psi.$$

Also ist Φ widersprüchlich.

(i) $\Rightarrow$ (ii). Nach Vor. existiert ψ mit $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$.

Also sind Sequenzen $\Delta_+ \psi$ und $\Delta_- \neg\psi$ mit $T_{\Delta_+}, T_{\Delta_-} \subseteq \Phi$ ableitbar.

Sei φ beliebig. Wir konstruieren eine Ableitung $\Delta\varphi$ für $T_\Delta \subseteq \Phi$ aus Ableitungen für $\Delta_+\psi$ und $\Delta_-\neg\psi$:

$n.$	$\Delta_+ \;\; \psi$	Prämissen
$n+1.$	$\Delta_- \;\; \neg\psi$	
$n+2.$	$\Delta_+ \Delta_- \;\; \psi$	(Ant) auf n.
$n+3.$	$\Delta_+ \Delta_- \;\; \neg\psi$	(Ant) auf $n+1$.
$n+4.$	$\Delta_+ \Delta_- \;\; \varphi$	(Wid') auf $n+2$ & $n+3$.

$$T_{\Delta_+ \Delta_-} = T_{\Delta_+} \cup T_{\Delta_-} \subseteq \Phi$$

$$\Longrightarrow \quad \Phi \vdash \varphi.$$

Da φ beliebig war, folgt die Beh.

q.e.d.

4.7.6 Lemma *Für alle Φ, φ gilt:*

(a) $\Phi \vdash \varphi$ *gdw* Wv $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$.

EFT!
"widersprüchlich"

Φ widersprüchlich falls ein ψ ex. mit $\Phi \vdash \psi$ und $\Phi \vdash \neg\psi$.

Beweis $\Longrightarrow$

Ang. $\Phi \vdash \varphi$.

$\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \neg\varphi$ [wg. (Vor)]

$\Phi \cup \{\neg\varphi\} \vdash \varphi$ [wg. (Ant)]

Setze $\psi := \varphi$ und wir haben, daß $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widersprüchlich ist.

$\Longleftarrow$ Ang. $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widersprüchlich.

Dann folgt nach Lemma 4.7.2, daß eine Sequenz $\Delta \neg\varphi\ \varphi$ mit $T_\Delta \subseteq \Phi$ ableitbar ist.

Auch nach (Vor) $\Delta\varphi\varphi$ ist ableitbar.

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta \neg\varphi\ \varphi \\ \Delta\ \varphi\ \varphi\end{array}}{\Delta\ \ \varphi}\ (\text{FU})$$

$\Longrightarrow \Phi \vdash \varphi$.

q.e.d.

KOROLLAR. Äquivalent sind:

(i) Für alle Φ, φ gilt:

$$\Phi \models \varphi \Longrightarrow \Phi \vdash \varphi$$

[Vollständigkeit]

(ii) Jede widerspruchsfreie Menge Φ ist erfüllbar.

Beweis (i) $\Rightarrow$ (ii)

Es gelte (i). ~~Zeige~~, daß jede nicht erfüllbare Menge widersprüchlich ist.

Φ nicht erfüllbar $\Longrightarrow$ es ex. kein $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models \Phi$.

D.h. $\Phi \models \varphi$ gilt für alle φ trivialerweise

$\Updownarrow$

[$\forall \mathfrak{I}$ $\mathfrak{I} \models \Phi \Rightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$, also trivialerweise wahr, weil solche $\mathfrak{I}$ nicht existieren]

Also z.B. $\Phi \models \varphi$ und $\Phi \models \neg\varphi$

$$\Downarrow (i) \qquad\qquad \Downarrow (i)$$

$$\Phi \vdash \varphi \qquad\qquad \Phi \vdash \neg\varphi$$

Also ist Φ widersprüchlich.

(ii) $\Rightarrow$ (i).

(ii) Jede widerspruchsfreie Menge ist erfüllbar

(i) Vollständigkeit.

$\Phi \models \varphi \Rightarrow \Phi \vdash \varphi$

Ang. $\Phi \nvdash \varphi$

$\overset{\text{Lemma 4.7.6}}{\Longleftrightarrow}$ $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ widerspruchsfrei

$\overset{\text{(ii)}}{\Longrightarrow}$ $\Phi \cup \{\neg\varphi\}$ erfüllbar

$\Longrightarrow$ ex. $\mathfrak{I} \models \Phi \cup \{\neg\varphi\}$

$\Longrightarrow$ $\mathfrak{I} \models \neg\varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{I} \not\models \varphi$

$\Longrightarrow$ $\Phi \not\models \varphi$.

q.e.d.

Wir zeigen den Gödelschen Vollständigkeitssatz durch Angabe eines Modells $\mathfrak{I}^{\Phi}$ für eine widerspruchsfreie Menge Φ.

IDEE

Leon Henkin (1950ger Jahre)

Verwende die Syntax der Sprache als unser Modell.

Bsp. Sprache $\{0, s\}$ der Peano-Arithmetik.

Terme: $0 \quad s0 \quad ss0 \quad sss0 \quad ssss0 \quad \ldots$

Natürliche Definition einer Nachfolgerop. S auf diesen Termen

$$S(\underbrace{ss\ldots s}_{n\text{-mal}}0) := \underbrace{ss\ldots s}_{n+1\text{-mal}}0 .$$

Kanonischer Kandidat für die Interpr. von 0: 0.

Problem Es gibt mehr Terme in dieser Sprache: Variablen.

HENKIN-Konstruktion TERM-Struktur

Term-interpretation

Im Folgenden sei Φ eine Menge von Ausdrücken. Wir definieren nun eine Interpretation $\mathfrak{I}^\Phi = (\mathfrak{T}^\Phi, \beta^\Phi)$. Hierzu erklären wir zunächst auf der Menge T^S der S-Terme eine zweistellige Relation $\sim$ durch

$\boxed{t_1 \sim_\Phi t_2}$

Term-struktur

5.1.1 $t_1 \sim t_2$ *:gdw* $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$.

5.1.2 Lemma (a) *$\sim$ ist eine Äquivalenzrelation.*
(b) *$\sim$ ist im folgenden Sinne mit den Symbolen aus S verträglich:*
Wenn $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$, so gilt für n-stelliges $f \in S$

$$ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$$

und für n-stelliges $R \in S$

$$\Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n \quad gdw \quad \Phi \vdash Rt_1' \ldots t_n'.$$

Der *Beweis* ergibt sich leicht mit der Regel ($\equiv$) und 4.5.3, 4.5.4. Wir zeigen das hier exemplarisch in zwei Fällen.

(1) $\sim$ ist symmetrisch: Sei $t_1 \sim t_2$, also $\Phi \vdash t_1 \equiv t_2$. Nach 4.5.3(a) gilt dann $\Phi \vdash t_2 \equiv t_1$, d.h. $t_2 \sim t_1$.

(2) f sei ein n-stelliges Funktionssymbol aus S, und es sei $t_1 \sim t_1', \ldots, t_n \sim t_n'$, d.h. $\Phi \vdash t_1 \equiv t_1', \ldots, \Phi \vdash t_n \equiv t_n'$. Nach 4.5.4(b) gilt dann $\Phi \vdash ft_1 \ldots t_n \equiv ft_1' \ldots t_n'$, d.h. $ft_1 \ldots t_n \sim ft_1' \ldots t_n'$. ⊣

Es sei $\overline{t}$ die Äquivalenzklasse von t:

$$\longrightarrow \boxed{\overline{t} := \{t' \in T^S \mid t \sim t'\},}$$

und T^Φ (statt genauer $T^{\Phi,S}$) die Menge der Äquivalenzklassen:

$$T^\Phi := \{\overline{t} \mid t \in T^S\}.$$

T^Φ ist nicht leer. Über T^Φ definieren wir die S-Struktur $\mathfrak{T}^\Phi$, die sog. *Termstruktur zu Φ*, durch die folgenden Festsetzungen:

5.1.3 *Für n-stelliges $R \in S$:*

$$R^{\mathfrak{T}^\Phi}\overline{t_1} \ldots \overline{t_n} \;\; :gdw \;\; \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n.$$

5.1.4 *Für n-stelliges $f \in S$:*

$$f^{\mathfrak{T}^\Phi}(\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) := \overline{ft_1 \ldots t_n}.$$

$\beta^\Phi(v) := \overline{v}.$

5.1.5 *Für $c \in S$: $c^{\mathfrak{T}^\Phi} := \overline{c}$.*

$\mathfrak{I}^\Phi := (\mathfrak{T}^\Phi, \beta^\Phi)$

Term-Interpretation

5.1.7 Lemma (a) *Für alle* t *ist* $\boxed{\mathfrak{I}^\Phi(t) = \overline{t}.}$

(b) *Für alle atomaren Ausdrücke* φ *gilt:*

$$\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \quad \textit{gdw} \quad \Phi \vdash \varphi.$$

$t \equiv t'$

$Rt_1 \ldots t_n$

(c) *Für alle Ausdrücke* φ *und paarweise verschiedenen Variablen* $x_1, \ldots, x_n$ *gilt:*

(i) $\mathfrak{I}^\Phi \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$ *gdw es gibt* $t_1, \ldots, t_n \in T^S$ *mit* $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$.

(ii) $\mathfrak{I}^\Phi \models \forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi$ *gdw für alle Terme* $t_1, \ldots, t_n \in T^S$ *gilt* $\mathfrak{I}^\Phi \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$.

Beweis (a) ist einfache Induktion über den Termaufbau.

(b) Fall 1. $t \equiv t'$

$$\mathfrak{I}^\Phi \models t \equiv t'$$
$$\Longleftrightarrow \mathfrak{I}^\Phi(t) = \mathfrak{I}^\Phi(t')$$
$$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} \overline{t} = \overline{t'}$$
$$\Longleftrightarrow t \sim t'$$
$$\Longleftrightarrow \Phi \vdash t \equiv t'$$

Fall 2 $Rt_1 \ldots t_n$

$$\mathfrak{I}^\Phi \models Rt_1 \ldots t_n$$
$$\Longleftrightarrow (\mathfrak{I}^\Phi(t_1), \ldots, \mathfrak{I}^\Phi(t_n)) \in R^{\mathfrak{I}^\Phi}$$
$$\overset{(a)}{\Longleftrightarrow} (\overline{t_1}, \ldots, \overline{t_n}) \in R^{\mathfrak{I}^\Phi}$$
$$\Longleftrightarrow \Phi \vdash Rt_1 \ldots t_n$$

Bem (c)(i):

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$$

$$\iff \text{ex. } t_1, \ldots, t_n \in T^S \quad \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}.$$

Beweis

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \models \exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi$$

$$\iff \text{ex. } a_1, \ldots, a_n \in T^{\Phi}$$

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \frac{a_1 \ldots a_n}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi$$

$$\iff \text{ex. } t_1, \ldots, t_n \in T^S$$

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \frac{\overline{t_1} \ldots \overline{t_n}}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi$$

$$\overset{(a)}{\iff} \text{ex. } t_1, \ldots, t_n \in T^S$$

$$\mathfrak{I}^{\Phi} \frac{\mathfrak{I}^{\Phi}(t_1) \ldots \mathfrak{I}^{\Phi}(t_n)}{x_1 \ldots x_n} \models \varphi$$

Substitutionslemma

$$\iff \text{ex. } t_1 \ldots t_n \in T^S \quad \mathfrak{I}^{\Phi} \models \varphi \frac{t_1 \ldots t_n}{x_1 \ldots x_n}$$

q.e.d.

Bemerkung

Lemma 5.1.7 (c) zeigt, daß das Termmodell eine besondere Struktur ist:

Falls $\mathcal{I}^{\Phi} \models \exists x \varphi$, so gibt es einen Term $t \in T^S$, welcher dies bezeugt.

Das gilt i.a. nicht und somit ist nicht zu erwarten, daß das Termmodell immer ein Modell von Φ ist.

Henkins Idee

l.a. ist $\daleth^{\Phi} \nvdash \Phi$.

Aber, falls Φ besonders schön ist, können wir vielleicht doch zeigen, daß $\daleth^{\Phi} \vDash \Phi$.

Falls jede widerspruchsfreie Menge Φ eine besonders schöne Obermenge Φ^* hat, so wären wir fertig.

Definition 5.1.8

Φ heiße **NEGATIONSTREU** falls für jedes φ gilt: $\Phi \vdash \varphi$ oder $\Phi \vdash \neg\varphi$.

ZEUGEN

Φ enthält Beispiele falls für jeden Ausdruck der Form $\exists x\varphi$ ein Term t existiert mit $\Phi \vdash \exists x\varphi \rightarrow \varphi\frac{t}{x}$

Φ heißt **HENKINMENGE** falls Φ widerspruchsfrei und negationstreu ist und Bsp. enthält

__Theorem__ (Henkins Lemma)

Falls Φ eine Henkinmenge ist, so gilt

$$\mathfrak{J}^{\Phi} \models \Phi .$$

__Theorem__ Falls Φ widerspruchsfrei ist, so ex. $\Phi^* \supseteq \Phi$ mit Φ^* ist eine Henkinmenge.

Aus diesen beiden Theoremen folgt der Vollständigkeitssatz:

Φ widerspruchsfrei

$\Downarrow$

$\exists \Phi^* \supseteq \Phi$ Henkin

$\Downarrow$

$\mathfrak{J}^{\Phi^*} \models \Phi^*$.

$\Downarrow$

$\mathfrak{J}^{\Phi^*} \models \Phi \longrightarrow \Phi$ ist erfüllbar.