MLML $\overline{\underline{XXIII}}$

1. Juli 2021

KOMPAKTHEITSSATZ

Dies werden wir in VL $\overline{\underline{XXIII}}$ & $\overline{\underline{XXIV}}$ beweisen.

Falls es einen vollständigen und korrekten Kalkül gibt, so gilt:

$$\Phi \text{ ist endlich erfüllbar} \iff \Phi \text{ ist erfüllbar}$$

$\varphi_{\geq n}$

$\Phi := \{\varphi_{\geq n} ; n \in \mathbb{N}\}$

Anwendungen:

Grenzen der Ausdrückbarkeit in der Logik erster Stufe

Bsp.

1. Endlichkeit
2. Nichtexistenz von unendlichen Ketten
3. Peano-Struktur
4. (G12) Archimedizität

Andere Grenzen:

Definierbarkeit

Aus Teil I der VL.

$\mathfrak{Z} := (\mathbb{Z}, +, 0)$

Beispiel

$A \subseteq \mathbb{Z}$ definierbar

gdw ex. φ mit 1 freier Variable x, s.d.

$$a \in A \iff \mathfrak{Z}\tfrac{a}{x} \models \varphi$$

Wir hatten gesehen, daß nicht alle TM $A \subseteq \mathbb{Z}$ definierbar sind.

Wg. des Isomorphielemmas müssen def'bare Menge unter Automorphismen invariant sein, d.h.

$\pi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ ein $\mathfrak{Z}$-Automorphismus ist

und $A \subseteq \mathbb{Z}$ def'bar, so ist

$$\pi[A] = A.$$

In $\mathfrak{Z}$ ist $x \longmapsto -x$ ein $\mathfrak{Z}$-Automorphismus, also ist $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ nicht definierbar.

ABER: Wir sollten überrascht sein, daß es nicht definierbare Mengen gibt!

Warum?

Die TM von $\mathbb{Z}$ sind $Pot(\mathbb{Z})$ und diese ist nach Cantors Theorem überabzählbar.

Die definierbaren TM von $\mathbb{Z}$

$$Def(\mathfrak{Z}) \subseteq Pot(\mathbb{Z})$$

haben eine Surjektion von der Menge

$F := \{\varphi \in L^S;\ \varphi$ hat eine freie Variable$\}$

auf $Def(\mathfrak{Z})$:

$$\varphi \longmapsto \{a \in \mathbb{Z};\ \mathfrak{Z}\tfrac{a}{x} \models \varphi\}$$

Also gibt es höchstens abzählbar viele Elemente von $Def(\mathfrak{Z})$, und somit

$$Pot(\mathbb{Z}) \setminus Def(\mathfrak{Z}) \neq \emptyset.$$

<u>Bem.</u> <u>Daß</u> es nicht def'bare TM gibt, ist unabhängig von S (Symbolmenge), solange S abzählbar ist; <u>welche</u> Mengen nicht def'bar sind, hängt von S ab.

Bsp. Fügen wir zu $S = \{+, 0\}$ noch $<$ hinzu, also

$$\mathfrak{Z}^< := (\mathbb{Z}, +, 0, <)$$

Dann definiert

$$\varphi(x) := (x \equiv 0 \vee 0 < x)$$

die TM $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$.

[Und $x \longmapsto -x$ ist kein $\mathfrak{Z}^<$-Automorphismus.]

Genauso:

Wir sollten bei Anwendungen des Kompaktheitssatzes nicht überrascht sein, daß es Klassen von Strukturen gibt, die nicht axiomatisiert werden können.

z.B. wenn ich Klassen durch eine einzelne Formel φ charakterisieren will, d.h. $\mathfrak{A} \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow \mathfrak{A} \models \varphi$, so $\longrightarrow$

kann es nur abzählbar viele auf diese Art charakterisierbare Klassen geben.

Auch hier: Es ist nicht überraschend, daß es viele Klassen, die nicht in der Logik erster Stufe auf diese Art charakterisiert werden können.

Aber: Welche sind es, die nicht charakterisiert werden können.

Hilfswerkzeug:

DER KOMPAKTHEITSSATZ.

Für eine Menge Φ von S-Sätzen sei

$$\mathrm{Mod}^S\Phi := \{\mathfrak{A} \mid \mathfrak{A}\ S\text{-Struktur und } \mathfrak{A} \models \Phi\}$$

die *Modellklasse von Φ*. Statt $\mathrm{Mod}^S\{\varphi\}$ schreiben wir auch $\mathrm{Mod}^S\varphi$.

6.3.1 Definition Sei $\mathfrak{K}$ eine Klasse von S-Strukturen.
(a) $\mathfrak{K}$ heißt *elementar* :gdw es gibt einen S-Satz φ mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\varphi$.
(b) $\mathfrak{K}$ heißt *Δ-elementar* :gdw es gibt eine Menge Φ von S-Sätzen mit $\mathfrak{K} = \mathrm{Mod}^S\Phi$.

Äquivalente Bezeichnungen:

Δ-elementar $\Longleftrightarrow$ AXIOMATISIERBAR und Φ heißt das Axiomensystem der Klasse $\mathfrak{K}$.

Falls Φ endlich ist, z.B. das Axiomensystem der Gruppen $\Phi = \{\varphi_A, \varphi_N, \varphi_I\}$, so kann man Φ zu einem Axiom zusammenfassen

$$\varphi := \varphi_A \wedge \varphi_N \wedge \varphi_I$$

elementar $\Longleftrightarrow$ ENDLICH AXIOMATISIERBAR

In VL XXII hatten wir ein Bsp. einer axiomatisierbaren Klasse (die unendlichen Gruppen) und ein Bsp. einer nicht-axiomatisierb. Klasse (endl. Gruppen) gesehen. Vgl (H12).

ACHTUNG

Die "Grenzen der Logik erster Stufe" sind streng genommen immer Grenzen einer spezifischen Logik L^S.

Insbesondere ist es möglich, eine Klasse $\mathfrak{K}$ zu haben und

$$S \subsetneq S^* \subsetneq S^{**} \text{ mit}$$

$\mathfrak{K}$ ist nicht Δ-elementar in S,

$\mathfrak{K}$ ist Δ-elementar & nicht elementar in S^*,

und $\mathfrak{K}$ ist elementar in S^{**}.

DIE REGELN DES GENTZENSCHEN SEQUENZENKALKÜLS

(Ant) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$, falls $\Gamma \subseteq \Gamma'$ — 1 — 1-stellig

(Vor) $\dfrac{}{\Gamma \quad \varphi}$, falls $\varphi \in \Gamma$ — 2 — 0-stellig

(FU) $\dfrac{\begin{array}{lll}\Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi\end{array}}{\Gamma \qquad \varphi}$ — 3 — 2-stellig

(Wid) $\dfrac{\begin{array}{lll}\Gamma & \neg\varphi & \psi \\ \Gamma & \neg\varphi & \neg\psi\end{array}}{\Gamma \qquad \varphi}$ — 4 — 2-stellig

($\vee$A) $\dfrac{\begin{array}{lll}\Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi\end{array}}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi) \quad \chi}$ — 5 — 2-stellig

($\vee$S) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\varphi \vee \psi)}$ — 6, $\dfrac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma \quad (\psi \vee \varphi)}$ — 7 — 1-stellig

($\exists$A) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}$, falls y nicht frei in $\Gamma\ \exists x\varphi\ \psi$ — 8 — 1-stellig

($\exists$S) $\dfrac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$ — 9 — 1-stellig

($\equiv$) $\dfrac{}{t \equiv t}$ — 10 — 0-stellig

(Sub) $\dfrac{\Gamma \qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$ — 11 — 1-stellig

§ 4.6 S.72

Erinnerung an die Regelschreibweise

$R \subseteq Seq^{n+1}$ interpretiert als $(S_1,\dots,S_n,S) \in R$ heißt S kann aus $S_1,\dots,S_n$ abgeleitet werden

n-stellig

$$\frac{\begin{array}{c} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{array}}{S}$$

0-stellige Regeln werden durch Ableitungsstriche ohne Eintrag über dem Strich beschrieben.

0-stellige Regeln erfüllen die Rolle der Axiome.

Zur Korrektheit des Kalküls reicht es (per definitionem), die Korrektheit jeder Regel nachzuweisen.

R ist <u>korrekt</u> falls f.a. $(S_1, \dots, S_n, S) \in R$ gilt:
falls $S_1, \dots, S_n$ korrekt, so auch S korrekt.

$S = \Delta\varphi$ ist <u>korrekt</u> falls
$$T_\Delta \models \varphi.$$

D.h. wir müssen zeigen:

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta_1 \varphi_1 \\ \Delta_2 \varphi_2\end{array}}{\Delta\varphi}$$ ist korrekt, falls

Falls $T_{\Delta_1} \models \varphi_1$ & $T_{\Delta_2} \models \varphi_2$,
so $T_\Delta \models \varphi$.

$T_\Gamma \subseteq T_{\Gamma'}$

4.2.1 Antezedensregel (Ant)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi}{\Gamma' \quad \varphi}$$, *falls jedes Glied von* Γ *ein Glied von* Γ' *ist* (*kurz: falls* $\Gamma \subseteq \Gamma'$).

Dabei braucht ein Glied, das in Γ mehrfach auftritt, in Γ' nur einmal aufzutreten.

4.2.2 Voraussetzungsregel (Vor)

$\varphi \in T_\Gamma$.

$$\frac{}{\Gamma \quad \varphi}$$, *falls* φ *ein Glied von* Γ *ist.*

Korrektheit von (Ant):

$\Gamma\varphi$ ist korrekt

$\Longrightarrow T_\Gamma \models \varphi$.

(*) $\Longrightarrow$ für alle $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$

z.z. $\Gamma'\varphi$ ist korrekt

$\Longleftrightarrow T_{\Gamma'} \models \varphi$

$\Longleftrightarrow$ für alle $\mathfrak{I}$ mit $\mathfrak{I} \models T_{\Gamma'}$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

$\Downarrow \qquad \Updownarrow$

$\mathfrak{I} \models T_\Gamma \overset{(*)}{\Longrightarrow} \mathfrak{I} \models \varphi$ ✓

Korrektheit von (Vor)

z.z. falls $\varphi \in T_\Gamma$,

so ist $\Gamma\varphi$ eine korrekte Sequenz.

$\Longleftrightarrow T_\Gamma \models \varphi$

$\Longleftrightarrow$ für alle $\mathfrak{I}$ mit $\underline{\mathfrak{I} \models T_\Gamma}$, gilt $\mathfrak{I} \models \varphi$.

4.2.3 Fallunterscheidungsregel (FU)

$\boxed{\gamma_1 \cdots \gamma_n \, \psi \mid \varphi}$

ANTEZEDENS | SUKZEDENS

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \psi & \varphi \\ \Gamma & \neg\psi & \varphi \\ \hline \Gamma & & \varphi \end{array}$$

<u>Korrektheitsbeweis</u> $\Gamma\psi\varphi$, $\Gamma\neg\psi\varphi$ seien korrekt

D.h. falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\psi\}$, so $\mathfrak{I} \models \varphi$ (*)

$\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\psi\}$, so $\mathfrak{I} \models \varphi$. (**)

z.z. $\Gamma\varphi$ ist korrekt $\iff T_\Gamma \models \varphi$.

Sei nun also $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$. Da $\mathfrak{I} \models \neg\psi \iff \mathfrak{I} \not\models \psi$

gilt entweder $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\psi\}$ oder $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\psi\}$.

$\Downarrow$ (*) $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ (**)

$\mathfrak{I} \models \varphi$ $\qquad\qquad$ $\mathfrak{I} \models \varphi$

$\Longrightarrow \mathfrak{I} \models \varphi$.

4.2.4 Widerspruchsregel (Wid)

Antezedens $\qquad$ Sukzedens

$$\begin{array}{lll} \boxed{\Gamma \;\; \neg\varphi} & \psi \\ \Gamma \;\; \neg\varphi & \neg\psi \\ \hline \Gamma & \varphi \end{array}$$

<u>Korrektheitsbeweis</u> $\Gamma\neg\varphi\psi$, $\Gamma\neg\varphi\neg\psi$ seien korrekt.

(*) Falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

(**) Falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\}$, so $\mathfrak{I} \models \neg\psi$.

z.z. falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$, so $\mathfrak{I} \models \varphi$.

Widerspruch!

Ang. $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\neg\varphi\} \xRightarrow{(*)} \mathfrak{I} \models \psi$

$\xRightarrow{(**)} \mathfrak{I} \models \neg\psi \iff \mathfrak{I} \not\models \psi$

4.2.5 Regel der $\vee$-Einführung im Antezedens ($\vee$A)

$$\begin{array}{lll} \Gamma & \varphi & \chi \\ \Gamma & \psi & \chi \\ \hline \Gamma & (\varphi \vee \psi) & \chi \end{array}$$

<u>Korrektheit</u>

Ang. $\Gamma \varphi \chi$, $\Gamma \psi \chi$ korrekt.

D.h. $\mathcal{I} \models T_\Gamma \cup \{\varphi\}$, so $\mathcal{I} \models \chi$ (*)

$\mathcal{I} \models T_\Gamma \cup \{\psi\}$, so $\mathcal{I} \models \chi$ (**)

Sei nun $\mathcal{I} \models T_\Gamma \cup \{(\varphi \vee \psi)\}$.

$$\mathcal{I} \models (\varphi \vee \psi) \underset{\text{Def.}}{\Longleftrightarrow} \underbrace{\mathcal{I} \models \varphi}_{\text{Fall 1}} \text{ oder } \underbrace{\mathcal{I} \models \psi}_{\text{Fall 2}}.$$

<u>Fall 1</u> $\mathcal{I} \models T_\Gamma \cup \{\varphi\} \xRightarrow{(*)} \mathcal{I} \models \chi$.

<u>Fall 2</u> $\mathcal{I} \models T_\Gamma \cup \{\psi\} \xRightarrow{(**)} \mathcal{I} \models \chi$

$\Downarrow$

$\Gamma (\varphi \vee \psi) \chi$ korrekt.

4.4.1 Regel der $\exists$-Einführung im Sukzedens ($\exists$S)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad \exists x\varphi}$$

t beliebiger Term

$\varphi\frac{t}{x}$ ist das Ergebnis der Substitutionsoperation!

Korrektheit: Ang. $\Gamma\ \varphi\frac{t}{x}$ ist korrekt.

$\Longleftrightarrow$ für $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$ gilt $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$ (*)

z.z. $\Gamma\ \exists x\varphi$ ist korrekt.

Sei nun $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$. Nach (*) gilt

$$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x} \Longleftrightarrow \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi$$ [Substitutionslemma]

$\Longrightarrow$ es ex. a $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$

$\Longrightarrow \mathfrak{I} \models \exists x\varphi.$

$\mathfrak{I} = (\mathfrak{A}, \beta)$

$\mathfrak{A} = (A, \alpha)$

4.4.2 Regel der $\exists$-Einführung im Antezedens ($\exists$A)

$$\frac{\Gamma \quad \varphi\frac{y}{x} \quad \psi}{\Gamma \quad \exists x\varphi \quad \psi}, \quad \boxed{\textit{falls } y \textit{ nicht frei in } \Gamma\ \exists x\varphi\ \psi.}$$

Korrektheitsbeweis

Ang. $\Gamma\ \varphi\frac{y}{x}\ \psi$ ist korrekt und y nicht frei in $\Gamma, \exists x\varphi, \psi$.

D.h. $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\varphi\frac{y}{x}\}$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

z.z. falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$, so $\mathfrak{I} \models \psi$.

Nehmen wir an $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$.

$\mathfrak{I} \models \exists x\varphi \underset{\text{Def}}{\Longleftrightarrow}$ ex. $a \in A$ mit $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

① $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\varphi\frac{y}{x}\} \Longrightarrow \mathfrak{I} \models \psi$

② $\mathfrak{I} \models T_\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$

$\Longrightarrow$ ex. $a \in A$ $\mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

③ y ist nicht frei in Γ, $\underline{\exists x \varphi}$, ψ.

$(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \overset{\text{Fall 1}}{\underset{x=y}{}} (\mathfrak{I}\frac{a}{x}) = (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x}$

$\Longrightarrow (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \models \varphi$

Fall 2
$x \neq y$

$\Longrightarrow y \notin \text{frei}(\varphi)$ $\quad (\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \models \varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{I}\frac{a}{x} \models \varphi$.

In beiden Fällen $(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{a}{x} \models \varphi$

$\mathfrak{I}\frac{a}{y}(y) = a$

$\underline{(\mathfrak{I}\frac{a}{y})\frac{(\mathfrak{I}\frac{a}{y})(y)}{x}} = \mathfrak{I}\frac{a}{y}\frac{a}{x} \models \varphi$

$\underset{\text{Substitutionslemma}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \varphi\frac{y}{x}}$ ☆

Nach dem Koinzidenzlemma, da $y \notin \text{frei}(\Gamma)$

$\boxed{\mathfrak{I}\frac{a}{y} \models T_\Gamma} + ☆ \underset{\text{Vor.}}{\Rightarrow} \mathfrak{I}\frac{a}{y} \models \psi \xrightarrow[y \notin \text{frei}(\psi)]{} \mathfrak{I} \models \psi$.

Bem.

1. Sehen Sie sich den Korrektheits-beweis von $(\exists A)$ gut an und verstehen Sie ihn.
2. Es ist der einzige nichttriviale Korrektheitsbeweis!
3. Lesen Sie S. 69/70 in EFT zur Notwendigkeit der Bedingung

$$y \notin \mathrm{frei}(\psi) \cup \mathrm{frei}(\exists x \varphi) \cup \mathrm{frei}(\Gamma).$$

4.4.3 Regel der Reflexivität der Gleichheit ($\equiv$)

$$\frac{}{t \equiv t}$$

0-stellig

4.4.4 Substitutionsregel für die Gleichheit (Sub)

$$\frac{\Gamma \qquad \varphi\frac{t}{x}}{\Gamma \quad t \equiv t' \quad \varphi\frac{t'}{x}}$$

Korrektheit von ($\equiv$).

z.z. ist für jede Interpretation $\mathfrak{I}$ gilt

$$\mathfrak{I} \models t \equiv t.$$

[Das ist klar, da $\mathfrak{I} \models t \equiv t \iff \mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t)$.]

Korrektheit von (Sub)

Ang. falls $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$, so $\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x}$. (*)

Ang. $\mathfrak{I} \models T_\Gamma$ und $\mathfrak{I} \models t \equiv t'$.

$\Downarrow$ (*) $\qquad\qquad \Updownarrow$ Def.

$\mathfrak{I} \models \varphi\frac{t}{x} \qquad\qquad \mathfrak{I}(t) = \mathfrak{I}(t')$

$\Updownarrow$ Substitutionslemma $\qquad\qquad \Downarrow$

$\mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t)}{x} \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{I}\frac{\mathfrak{I}(t')}{x} \models \varphi$

$\underset{\text{Subst.}}{\Longrightarrow} \mathfrak{I} \models \varphi\frac{t'}{x}.$

Satz

Der so definierte Gentzenkalkül ist korrekt.

Ziel. Zeige, daß er auch vollständig ist

$\longrightarrow$ GÖDELscher Vollständigkeits-satz.