MLML XXII

28. JUNI 2021

$\mathfrak{K}$-Ableitungen

KALKÜL $\mathfrak{K}$:
Menge von Regeln $R \subseteq \mathrm{Seq}^{n+1}$

Seq: GENTZEN-Sequenzen

$\boxed{\Delta\varphi}$: Δ ANTEZEDENS
φ SUKZEDENS

$T_\Delta := \{\psi;\ \psi \text{ taucht in } \Delta \text{ auf}\}$

$\Delta\varphi$ KORREKT $:\Longleftrightarrow$ $\boxed{T_\Delta \models \varphi}$

R KORREKT $:\Longleftrightarrow$ falls alle Sequenzen S_i $(i \leq n)$ korrekt sind und $(S_1, \ldots, S_n, S_{n+1}) \in R$, so S_{n+1} korrekt

$\mathfrak{K}$ KORREKT $:\Longleftrightarrow$ alle Regeln korrekt

SYNTAKTISCHER FOLGERUNGSBEGRIFF

$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ $:\Longleftrightarrow$ ex. $\Delta\varphi$ mit $T_\Delta \subseteq \Phi$ $\mathfrak{K}$-ableitbar

ENDLICHKEITSSATZ

Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so ex. $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich mit $\Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

ZIEL: Wir wollen einen korrekten und vollständigen Kalkül $\mathfrak{K}$.

Dies wird der GENTZEN-Kalkül sein, den wir in VL XXIII einführen und dessen Vollständigkeit wir in VL XXIV und XXV beweisen.

Heute Konsequenzen aus der Existenz eines solchen Kalküls.

→ Syntaktische Folgerung kommt (per definitionem) mit einem Endlichkeitssatz; semantische Folgerung nicht. Falls $\mathfrak{K}$ korrekt & vollst. ist, so überträgt sich Endlichkeit auf die semantische Folgerung.

$\mathfrak{K}$ korrekt $\underset{\text{XXI}}{\Longleftrightarrow}$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Longrightarrow \Phi \models \varphi$.

$\mathfrak{K}$ vollständig $:\Longleftrightarrow$ $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Longleftarrow \Phi \models \varphi$

Erinnerung Φ $\mathfrak{K}$-widersprüchlich falls ex. φ mit $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$ und $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$. Sonst widerspruchsfrei

Def. Eine Menge von S-Formeln Φ heißt **erfüllbar**, wenn es eine Interpretation $\mathfrak{I}$ gibt mit $\mathfrak{I} \models \Phi$.

Lemma 1 Falls Φ erfüllbar und $\mathfrak{K}$ ist korrekt, dann ist Φ $\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei.

Beweis Falls

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Longrightarrow \Phi \models \varphi$$

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi \Longrightarrow \Phi \models \neg\varphi$$

Korrektheit

Sei nun $\mathfrak{I} \models \Phi$. Dann gilt

$$\mathfrak{I} \models \varphi$$

$$\mathfrak{I} \models \neg\varphi \Longleftrightarrow \mathfrak{I} \not\models \varphi$$

Widerspruch!

Lemma 2 Falls Φ $\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei ged und $\mathfrak{K}$ vollständig ist, so ist Φ erfüllbar.

Beweis Ang. Φ nicht erfüllbar, also ex. kein $\mathfrak{I} \models \Phi$. Also gilt für jedes φ $\Phi \models \varphi$. Insbesondere $\Phi \models \neg\varphi$. Die Vollständigkeit von

$\hat{\mathfrak{K}}$ liefert $\Phi \vdash_{\hat{\mathfrak{K}}} \varphi$

und $\Phi \vdash_{\hat{\mathfrak{K}}} \neg\varphi$.

Also ist Φ $\hat{\mathfrak{K}}$-widersprüchlich. q.e.d.

Kor.(*) Falls $\hat{\mathfrak{K}}$ korrekt und vollständig, so sind äquivalent:

(i) Φ $\hat{\mathfrak{K}}$-widerspruchsfrei

(ii) Φ erfüllbar

Anwendung des Endlichkeitssatzes auf den Begriff der Widersprüchlichkeit:

Falls Φ $\hat{\mathfrak{K}}$-widersprüchlich ist, so existiert $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich, so daß Φ_0 $\hat{\mathfrak{K}}$-widersprüchlich ist.

Also: Falls für alle endlichen $\Phi_0 \subseteq \Phi$ gilt,
(**) daß Φ_0 $\hat{\mathfrak{K}}$-widerspruchsfrei ist, so ist Φ $\hat{\mathfrak{K}}$-widerspruchsfrei.

Def. Eine Menge Φ heiße **endlich erfüllbar** gdw jede endliche TM $\Phi_0 \subseteq \Phi$ erfüllbar ist.

[$\Longrightarrow$ Falls Φ erfüllbar, so endlich erfüllbar.]

Theorem (KOMPAKTHEITSSATZ)

Falls $\mathfrak{K}$ ein korrekter und vollständiger Kalkül ist, so gilt.

Φ ist erfüllbar $\Longleftrightarrow$ Φ ist endlich erfüllbar.

Beweis "$\Longrightarrow$" trivial.

"$\Longleftarrow$". Sei Φ endlich erfüllbar

$\Longleftrightarrow$ für alle $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich gilt: Φ_0 erfüllbar

$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ für alle $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich gilt: Φ_0 $\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei

$\overset{(**)}{\Longrightarrow}$ Φ $\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei

$\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ Φ ist erfüllbar. q.e.d.

Bemerkung

Dies fühlt sich etwas wie Magie an!

Es könnte z.B. sein, daß für jedes $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich eine Interpretation $\mathfrak{I}_{\Phi_0}$ existiert mit $\mathfrak{I}_{\Phi_0} \models \Phi_0$ aber $\mathfrak{I}_{\Phi_0} \not\models \Phi$

D.h. für verschiedene endliche Fragmente erhalten Sie unterschiedliche Interpretationen.

Der Kompaktheitssatz liefert ein

$$\mathfrak{I} \models \Phi$$

Also gilt $\mathfrak{I} \neq \mathfrak{I}_{\Phi_0}$ für alle $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich.

Frage: Wo kommt dieses $\mathfrak{I}$ her? Welche Komponente in diesem Beweis verrichtet die mathematische Arbeit?

[Antwort: VL $\overline{\underline{\text{XXIV}}}$ am kommenden Montag.]

6.2.2 Satz *Es sei Φ eine Ausdrucksmenge, die über beliebig großen endlichen Mengen erfüllbar ist (d.h., zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gebe es eine Φ erfüllende Interpretation über einer endlichen Menge, die mindestens n Elemente enthält). Dann ist Φ auch über einer unendlichen Menge erfüllbar.*

VON JETZT AN FÜR VL XXII NEHMEN WIR AN, DASS ES EINE KORREKTEN UND VOLLSTÄNDIGEN KALKÜL GIBT. [VL XXIII WIRD IHN DEF.]

Konsequenzen des Kompaktheitssatzes:

EFT 6.2.2

Beweis Die Formel

$$\varphi_{\geq n} := \exists x_1 \exists x_2 \cdots \exists x_n$$
$$\neg x_1 \equiv x_2 \wedge \neg x_1 \equiv x_3 \wedge \ldots \wedge \neg x_1 \equiv x_n$$
$$\wedge \neg x_2 \equiv x_3 \wedge \ldots \wedge \neg x_2 \equiv x_n$$
$$\wedge \neg x_3 \equiv x_4 \wedge \ldots \wedge \neg x_3 \equiv x_n$$
$$\vdots$$
$$\wedge \neg x_{n-1} \equiv x_n$$
$$= \bigwedge_{i \neq j} \neg x_i \equiv x_j$$

Sauber würden wir so etwas über Rekursion machen.

VERKÜRZTE NOTATION

drückt aus, daß es mindestens n verschiedene Objekte gibt.

Bem. $\varphi_{\geq n}$ ist ein S-Satz für jede Symbolmenge S, da keine nichtlogischen Symbole auftauchen.

$$\mathfrak{A} \models \varphi_{\geq n} \iff |A| \geq n.$$

Setze $\Phi := \{\varphi_{\geq n} ; n \in \mathbb{N}\}$.

Dann gilt

(*) $\mathfrak{A} \models \Phi \iff A$ unendlich.

Voraussetzung. Für jedes n ex. $\mathfrak{A}_n$ mit $|A_n| \geq n$ und $\mathfrak{A}_n \models \Phi$.

Dies heißt $\mathfrak{A}_n \models \varphi_{\geq n}$ und $\mathfrak{A}_n \models \varphi_{\geq k}$ für alle $k \leq n$.

Sei $\Psi_0 \subseteq \Psi$ endlich, so ex. ein n mit $\Psi_0 \subseteq \{\varphi_{\geq 0}, \dots, \varphi_{\geq n}\}$.

Also gilt $\mathfrak{A}_n \models \Phi \cup \Psi_0$.

Also ist $\Phi \cup \Psi$ endlich erfüllbar.

$\xRightarrow{\text{KOMPAKTHEIT}}$ $\Phi \cup \Psi$ erfüllbar $\Longrightarrow \mathfrak{A} \models \Phi \cup \Psi$ $\overset{(*)}{\Longrightarrow}$ A ist unendlich.

q.e.d.

KOROLLARE

1. Es gibt eine unendliche Gruppe.

[Bem. Dies kann natürlich besser ohne Kompaktheitssatz durch konkrete Angabe einer unendlichen Gruppe bewiesen werden.]

Φ_G seien die Gruppenaxiome.

Wir stellen fest, daß die zyklische Gruppe mit n Elementen C_n eine Gruppe ist mit $C_n \models \varphi_{\geq n}$.

Also folgt aus Satz 6.2.2, daß ein unendliches Modell von Φ_G existiert.

BEOBACHTUNG: Unser Beweis ist vollständig nicht-konstruktiv; wir wissen nicht, wie diese Gruppe aussieht.

Genauere Überlegung: Falls für alle n, $C_n \models \varphi$, so können wir Satz 6.2.2. auf $\Phi_G \cup \{\varphi\}$ anwenden und erhalten ein unendliches Modell von $\Phi_G \cup \{\varphi\}$.

2. Insbesondere sind alle C_n endlich.
Angenommen es gäbe eine Formel ψ, die Endlichkeit charakterisiert, also

(*) $\mathfrak{A} \models \psi \iff A$ endlich

Dann wäre $C_n \models \Phi_G \cup \{\psi\}$ und somit nach Satz 6.2.2 auch das unendliche Modell ein Modell von $\Phi_G \cup \{\psi\}$. Das wäre ein Widerspruch zu (*). Also kann es keine Formel in der Sprache der Gruppen geben, welche Endlichkeit charakterisiert.

3. Vgl. die Charakterisierung von Unendlichkeit durch eine Menge Ψ von Formeln.

4. Für Endlichkeit ist selbst diese Form von Charakterisierung nicht möglich:

Ang. Ψ Menge von Formeln mit

$G \models \Psi \iff G$ endlich

Dann gilt $C_n \models \Psi$. Wende 6.2.2 auf $\Phi_G \cup \Psi$ an. Widerspruch!

5. Sprache $S = \{<\}$ der partiellen Ordnungen:

$$\psi_n := \exists x_1 \ldots \exists x_n \; x_1 < x_2 \wedge x_2 < x_3 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} < x_n$$

ψ_n besagt: "Es ex. eine Kette der Länge n in einer partiellen Ordnung."

$$L_n \quad \underbrace{\bullet - \bullet - \bullet - \bullet - \bullet \cdots - \bullet}_{\text{Länge } n}$$

$L_n \models \psi_n$, außerdem $m \geq n$, $L_m \models \psi_n$.

$$\Psi := \{\psi_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

Φ_{PO} Axiome der partiellen Ordnungen

$$L_n \models \Phi_{PO} \cup \{\psi_m ; m \leq n\}$$

Also ist $\Phi_{PO} \cup \Psi$ endlich erfüllbar, also nach Kompaktheit $\underline{\underline{\Phi_{PO} \cup \Psi \text{ erfüllbar.}}}$

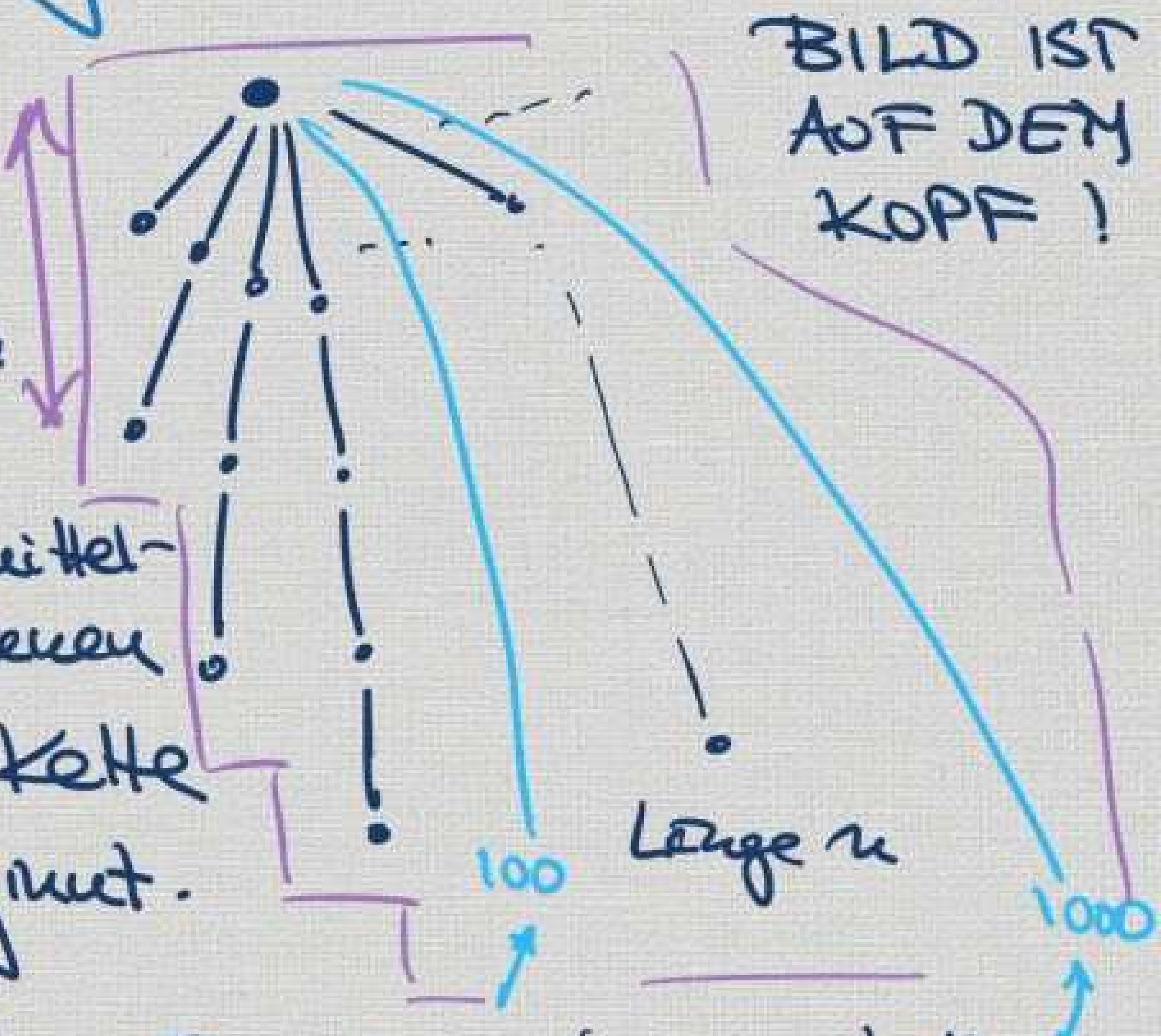
Allerdings beschreibt

$$\overline{\Phi}_{PO} \cup \overline{\Psi}$$

nicht: "Es gibt eine unendliche Kette."

Bsp. P

P besteht aus einem minimalen Element mit unendlichen unmittelbaren NF, von denen das n-te eine Kette der Länge n beginnt.



6. Erweitere die Sprache der partiellen Ordnungen um Konstantensymbole c_n (für $n \in \mathbb{N}$).

$$\psi'_n := c_1 < c_2 \wedge c_2 < c_3 \wedge \dots \wedge c_{n-1} < c_n$$

Sei $S^* = \{<, \{c_i ; i \in \mathbb{N}\}\}$ die erweiterte Symbolmenge.

Dann ist

$$L_n \quad \underbrace{\overset{l_1}{\bullet} - \overset{l_2}{\bullet} - \bullet - \bullet - \cdots \overset{l_n}{\bullet}}_{\text{Länge } n}$$

eine S^*-Struktur, wenn wir c_n durch l_n interpretieren.

$$L_n \models \underline{\Phi_{PO} \cup \{\psi'_m ; m \le n\}}$$

$$\Psi' := \{\psi'_n ; n \in \mathbb{N}\}$$

Also ist $\Phi_{PO} \cup \Psi'$ endlich erfüllbar, also nach Kompaktheit erfüllbar.

Also gibt es

$$(P, <, \{x_i ; i \in \mathbb{N}\}) \models \Phi_{PO} \cup \Psi'$$

also insbesondere gilt

$$x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots$$

7. Ebenso wie bei den Gruppen folgt: Es kann keine Formel δ oder auch eine Formelmenge Δ geben, so daß

$\mathfrak{P} \models \Delta \iff \mathfrak{P}$ hat nur endliche Ketten

Denn $L_u \models \Delta$, aber die unendliche Struktur, die wir erzeugt haben, nicht.

8. Wir betrachten $S := \{0, s\}$ die Sprache der Peano-Strukturen.

Wir hatten in der Mengenlehre gesehen, daß die drei Peano-Axiome eindeutig b.a.I. eine Struktur $(\mathbb{N}, 0, s)$ bestimmen.

Können wir die Peano-Axiome in L^S formulieren? [NEIN!]

$$t_0 := 0$$
$$t_{n+1} := s(t_n)$$

Füge neues Konstantensymbol c hinzu und schreibe $\Gamma := \{\gamma_n;\ n \in \mathbb{N}\}$

$$\gamma_n := \neg c \equiv t_n$$

<u>Beh.</u> Es ex. kein Φ, so daß

$$\mathfrak{N} \models \Phi \iff \mathfrak{N} \text{ ist Peano-Struktur.}$$

Sei $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ endlich.
Dann ex. $m \in \mathbb{N}$, so daß

$$\Gamma_0 \subseteq \{\gamma_0, \dots, \gamma_m\}.$$

Falls c durch $m+1$ interpretiert wird, so sind γ_i (für $i \leq m$) alle wahr:

$$(\mathbb{N}, 0, s, \underset{\uparrow \atop c}{\underline{m+1}}) \models \Phi \cup \Gamma_0$$

Somit ist $\Phi \cup \Gamma$ endlich erfüllbar.
Damit nach Kompaktheit erfüllbar:

$$\mathfrak{M} := (M, m_0, S, x) \models \Phi \cup \Gamma.$$

Aber falls $f : \mathbb{N} \longrightarrow M$ strukturerhaltend so ist

$$\text{Bild}(f) = \{ t_n^{\mathfrak{M}} ; n \in \mathbb{N} \} \subsetneqq M,$$

denn $x \notin \text{Bild}(f)$.
Also ist f kein Isomorphismus. q.e.d.