MLML XXI 24. Juni 2021

Zurück zur Mathematischen Logik

Beweisbarkeit / Nichtbeweisbarkeit

"man kann zeigen" / "man kann nicht zeigen"

Folgerungsbegriff:

SEMANTISCHE FOLGERUNG

$\Phi \models \varphi \iff$

für alle Modelle $\mathfrak{M}$, falls $\mathfrak{M} \models \Phi$, so ist $\mathfrak{M} \models \varphi$.

Also $\Phi \not\models \varphi \iff$ es gibt ein Modell $\mathfrak{M}$ mit $\mathfrak{M} \models \Phi$ und $\mathfrak{M} \not\models \varphi$.

[Angabe eines Gegenbeispiels.]

Bsp. FST $\not\models$ Inf
Z $\not\models$ Ers
etc.

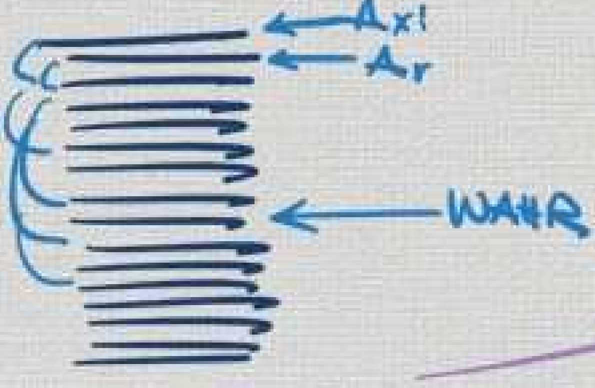
Wir beachten, daß wir NICHTFOLGERUNGEN (wie z.B. FST $\not\models$ Inf oder Z $\not\models$ Ers) durch Angabe eines Gegenbsp. bewiesen haben, aber FOLGERUNGEN (z.B. Pot + u-Ax $\models$ Paar) durch Angabe eines "Arguments".

Unpräzise Definition: Wir sagen, daß eine endliche Folge von Formeln ein Beweis aus Voraussetzungen Φ ist, falls für jedes Glied φ der Folge gilt:

!!

(a) $\varphi \in \Phi$ oder

(b) es gibt frühere Folgenglieder, aus denen φ folgt.



Dies müssen wir noch präzise definieren.

Auf der Grundlage einer solchen Definition können wir dann definieren:

$\Phi \vdash \varphi$

[Φ impliziert syntaktisch φ
Φ beweist φ]

$:\Longleftrightarrow$ es ex. ein Beweis mit Vor. Φ, in dem φ vorkommt.

Frage Was ist das Verhältnis zw.

$\Phi \models \varphi$ und $\Phi \vdash \varphi$?

SEMANTISCHE FOLGERUNG | SYNTAKTISCHE FOLGERUNG

$\Phi \models \varphi$ für alle Modelle $\mathfrak{M}$ ... | $\Phi \vdash \varphi$ es gibt Beweis ...

$\Phi \not\models \varphi$ es gibt ein Modell $\mathfrak{M}$ ... | $\Phi \nvdash \varphi$ es gibt keinen Beweis ...

Wir brauchen:

$$\Phi \vdash \varphi \Longrightarrow \Phi \models \varphi$$

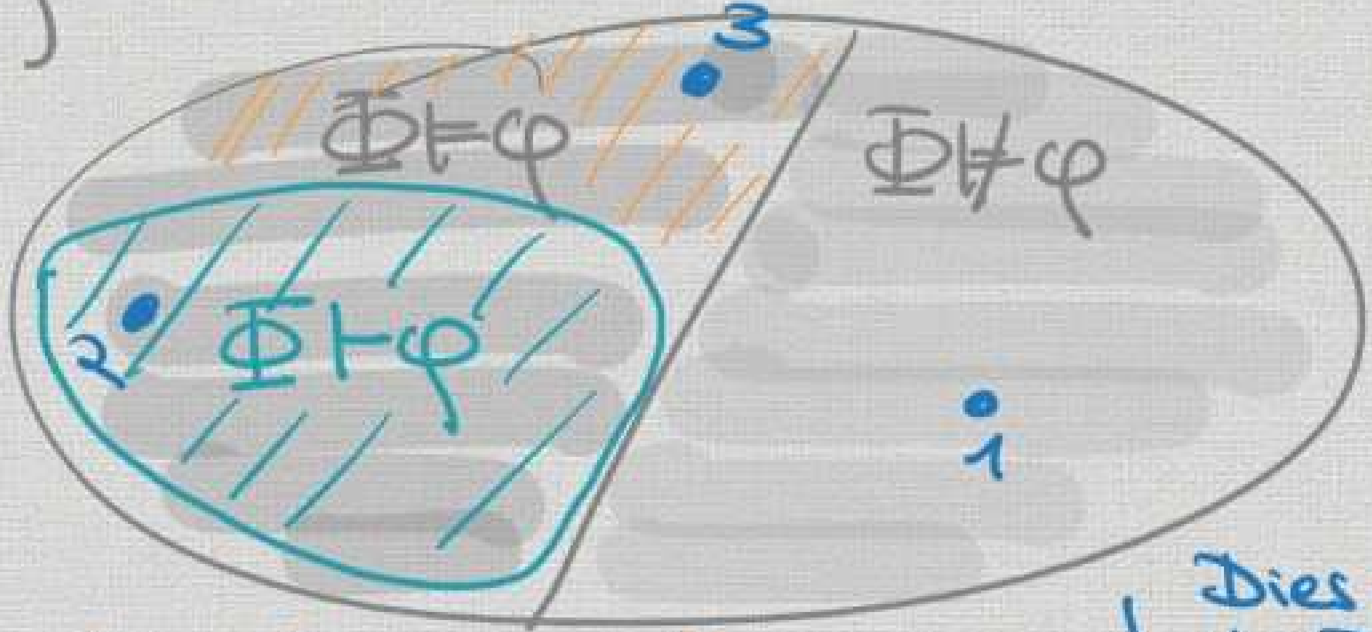
[sonst könnte es Beweise trotz Gegenbsp. geben]

$\boxed{\text{KORREKTHEITSSATZ}}$

$$\Phi \vdash \varphi \Longleftarrow \Phi \models \varphi$$

VOLLSTÄNDIGKEIT

(Φ, φ)



1: (Φ, φ) mit Gegenbsp.

2: (Φ, φ) mit Beweis

3: $\Phi \models \varphi$ ist wahr, aber es gibt keinen Beweis.

Dies wäre das Bild für einen korrekten aber nicht vollständigen Beweisbegriff

Zitat aus Radioansprache 1930

WIR MÜSSEN WISSEN,
WIR WERDEN WISSEN.

ZIEL

Definiere einen korrekten und vollständigen Beweisbegriff.

Schritt 1. Def. $\vdash$.

Schritt 2. Beweis, daß $\vdash$ korrekt ist.

Schritt 3. Beweis, daß $\vdash$ vollständig ist.

Wir werden sehen, daß die Vollständigkeit + Korrektheit eines Beweisbegriffs den Charakter der Endlichkeit in $\vdash$ zu dem Begriff $\models$ überträgt mit z.T. etwas unerwarteten Konsequenzen.

[VL XXII].

Def. Sei X eine Menge.

- Eine *n-stellige Regel* auf X ist eine Relation $R \subseteq X^{n+1}$.
- Ein *Kalkül* ist eine Menge von Regeln. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül.
- Eine endliche Folge $(x_1, \ldots, x_n)$ von Elementen von X heißt eine *$\mathfrak{K}$-Ableitung* genau dann, wenn für jedes $i \leq n$ eine k-stellige Regel $R \in \mathfrak{K}$ existiert und $i_1, \ldots, i_k < i$ mit $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}, x_i) \in R$.
- Wir schreiben $\vdash_{\mathfrak{K}} x$ für "es gibt eine $\mathfrak{K}$-Ableitung, in der x auftaucht".

Bem. Falls keine nullstellige Regel in $\mathfrak{K}$ existiert, so kann es keine nichtleere $\mathfrak{K}$-Ableitung geben und somit gilt

$$\nvdash_{\mathfrak{K}} x \text{ für alle } x.$$

Bsp. Term- und Formelableitungen aus dem ersten Abschnitt sind Bsp.

① Termkalkül

X ist die Menge aller Zeichenketten.

$R_V := \{(v) ; v \text{ Variable}\}$

Nullstellige Regel

$R_K := \{(c) ; c \text{ Konstantensymbol}\}$

Nullstellige Regel

Falls f ein n-stelliges Fkt.symbol ist, so definieren wir

$$R_f := \{(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n, f\zeta_1 \cdots \zeta_n) ; \zeta_i \text{ Zeichenketten}\}$$

Dann definieren diese Regeln den Termkalkül $\mathfrak{K}_{Term}$ und etwas ist eine Termableitung gdw es eine $\mathfrak{K}_{Term}$-Ableitung ist.

② Formelkalkül $\mathfrak{K}_{\text{Formel}}$

$$R := \{(t_1 \equiv t_2);\ t_1, t_2 \text{ Terme}\}$$

Nullstellige Regel

usw.

Ebenso gilt: Formelableitung $\iff$ $\mathfrak{K}_{\text{Formel}}$-Ableitung.

<u>Bem.</u> Der Begriff des Kalküls ist viel allgemeiner als nur der Beweiskalkül und kann in vielen Bereichen (insbesondere der theoretischen Informatik) verwendet werden.

GENTZENSCHER SEQUENZEN-KALKÜL

Gerhard Gentzen
1909–1945

Def. Eine Gentzensche Sequenz oder Sequenz ist eine nichtleere Folge von Formeln.

wobei $n=0$ möglich ist

$$\underbrace{\varphi_1 \dots \varphi_n}_{\text{möglicherweise leere endliche Folge von Formeln}} \quad \underbrace{\varphi_{n+1}}_{\text{Formel}}$$

ANTEZEDENS

SUKZEDENS

Wir schreiben eine Sequenz als $\Delta\varphi$ mit Δ Folge von Formeln (= Antezedens) und φ Formel (= Sukzedens).

Wir interpretieren die Sequenz $\Delta\varphi$ als

"wenn alle Formeln in Δ gelten, so gilt φ".

Wir schreiben Seq für die Menge aller Sequenzen. Wir definieren den Gentzenkalkül auf Seq.

D.h. eine n-stellige Regel ist

$$R \subseteq Seq^{n+1}.$$

Wir schreiben diese Regel üblicherweise als

$$\frac{\begin{array}{c}\Delta_1 \varphi_1 \\ \Delta_2 \varphi_2 \\ \vdots \\ \Delta_n \varphi_n\end{array}}{\Delta \varphi}$$

interpretiert als

$$(\Delta_1\varphi_1, \Delta_2\varphi_2, \dots, \Delta_n\varphi_n, \Delta\varphi) \in R.$$

<u>Bsp.</u> 2-stellige Regel

$$\boxed{\frac{\begin{array}{c}\Delta \varphi \\ \Delta \psi\end{array}}{\Delta (\varphi \wedge \psi)}}$$

gleichbedeutend mit

$$R := \{(\Delta\varphi, \Delta\psi, \Delta(\varphi\wedge\psi)),$$

für Δ Folge von Formeln, φ, ψ $\}$

Falls Δ eine Folge von Formeln Formeln ist, so schreiben wir

$$T_\Delta := \{\varphi \,;\, \varphi \text{ taucht in } \Delta \text{ auf}\}$$

Def. ① Eine Sequenz $\Delta\varphi \in Seq$ heißt **korrekt**, falls $T_\Delta \models \varphi$.

② Eine Regel $R \subseteq Seq^{n+1}$ heißt **korrekt**, falls gilt:

wenn $\Delta_1\varphi_1, \ldots, \Delta_n\varphi_n$ korrekt sind und $(\Delta_1\varphi_1, \ldots, \Delta_n\varphi_n, \Delta\varphi) \in R$, so ist $\Delta\varphi$ korrekt.

[korrekte Seq. werden durch R in korrekte Seq. überführt.]

③ Ein Kalkül $\mathfrak{K}$ heißt **korrekt** wenn jede seiner Regeln korrekt ist.

④ Falls Φ eine Menge von Formeln ist, so setzen wir

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \;:\Longleftrightarrow$$

eine Folge $\underline{\Delta}$ existiert, mit $\underline{T_\Delta \subseteq \Phi}$ und $\vdash_{\mathfrak{K}} \Delta\varphi$.

Informelle Korrektheit:
$\Phi \vdash \varphi \Longrightarrow \Phi \models \varphi$.

Bemerkung. Definition ④ impliziert den sogenannten ENDLICHKEITSSATZ.

Proposition (Endlichkeitssatz).

Falls $\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$, so existiert eine endliche TM $\Phi_0 \subseteq \Phi$ mit $\Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi$.

Beweis. Folgt direkt aus der Definition:

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \Longrightarrow \exists \Delta \text{ mit } T_\Delta \subseteq \Phi \quad \vdash_{\mathfrak{K}} \Delta\varphi$$

$$\Longrightarrow T_\Delta \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi.$$

Setze $\Phi_0 := T_\Delta$ endlich. q.e.d.

Lemma Sei $\hat{k}$ ein Kalkül. Dann sind äquivalent:

(1) $\hat{k}$ ist korrekt

(2) für alle Φ, φ gilt:

$$\Phi \vdash_{\hat{k}} \varphi \implies \Phi \models \varphi.$$

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2).

Ang. $\Phi \vdash_{\hat{k}} \varphi \implies$ ex. Δ mit $T_\Delta \subseteq \Phi$ und $\vdash_{\hat{k}} \Delta\varphi$

$\underset{[\hat{k} \text{ korrekt}]}{\implies} T_\Delta \models \varphi$

$\implies \Phi \models \varphi$ [da $\Phi \supseteq T_\Delta$].

(2) $\Rightarrow$ (1).

Ang. $\hat{k}$ inkorrekt. Es ex. $\Delta\varphi$ inkorrekt mit $\vdash_{\hat{k}} \Delta\varphi$.

$\Delta\varphi$ inkorrekt $\Downarrow$ $T_\Delta \not\models \varphi$

$\vdash_{\hat{k}} \Delta\varphi \Updownarrow T_\Delta \vdash_{\hat{k}} \varphi$

Setze $\Phi := T_\Delta$ $\quad T_\Delta \vdash_{\hat{k}} \varphi \longrightarrow$ Wid. zu (2).

qed.

Def. Sei $\mathfrak{K}$ ein Kalkül.

① Φ heißt **$\mathfrak{K}$-widersprüchlich**, falls eine Formel φ existiert mit

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \quad \text{und}$$

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi \,.$$

② Φ heißt **$\mathfrak{K}$-widerspruchsfrei**, falls es nicht $\mathfrak{K}$-widersprüchlich ist.

Korollar Falls Φ $\mathfrak{K}$-widersprüchlich, so existiert $\Phi_0 \subseteq \Phi$ endlich, so daß Φ_0 $\mathfrak{K}$-widersprüchlich ist.

Beweis.

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \xRightarrow[\text{LICHKEITS-SATZ}]{\text{END-}} \Phi_1 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \qquad \Phi_1 \subseteq \Phi \text{ endlich}$$

$$\Phi \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi \Longrightarrow \Phi_2 \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi \qquad \Phi_2 \subseteq \Phi \text{ endlich}$$

$$\Longrightarrow \Phi_1 \cup \Phi_2 =: \Phi_0$$

$$\Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \varphi \text{ und } \Phi_0 \vdash_{\mathfrak{K}} \neg\varphi$$

q.e.d.