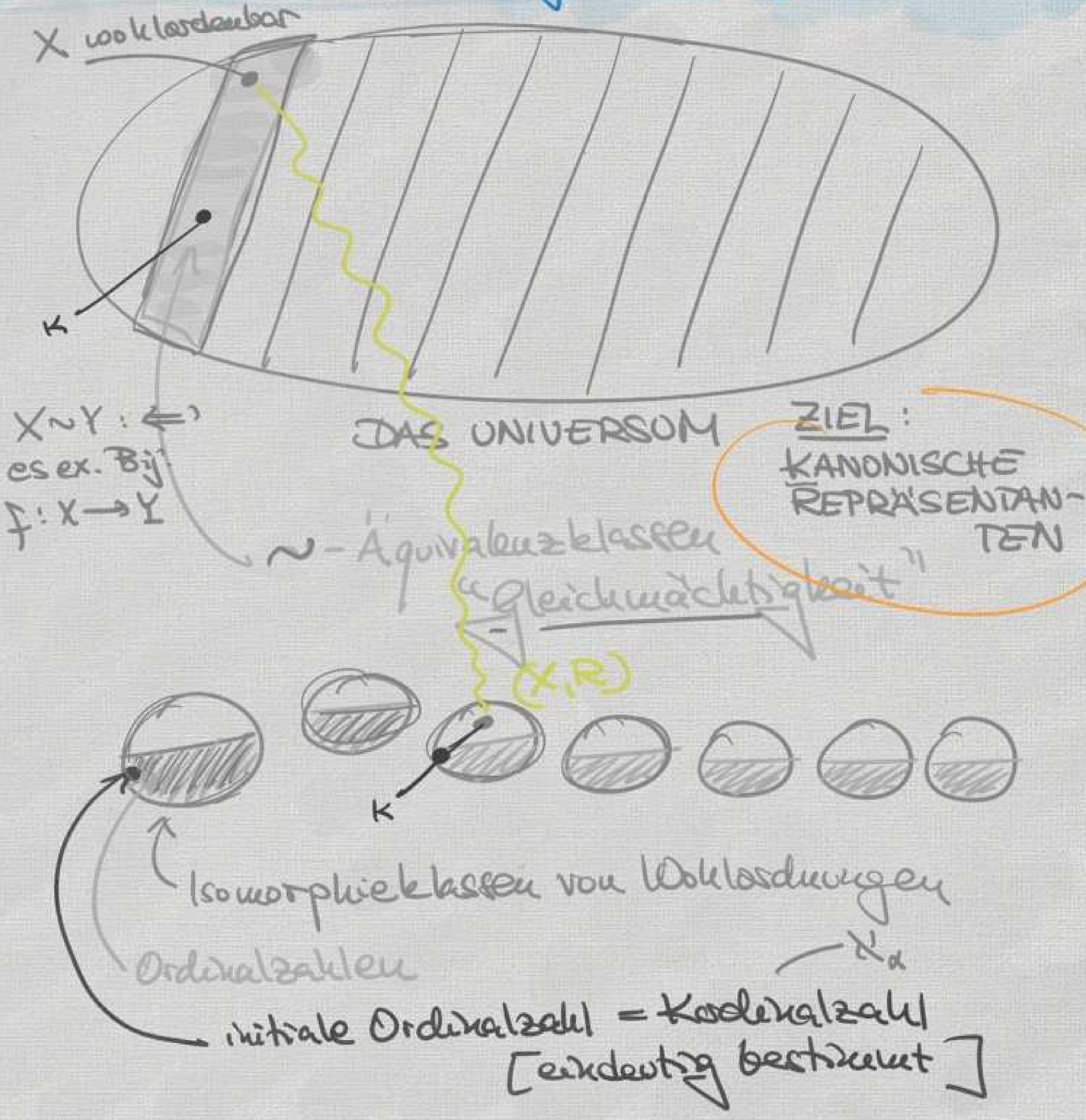
Zwanzigste Vorlesung

21. Juni 2021

MATHEMATISCHE LOGIK & MENGENLEHRE

(Letzte VL des Mengenlehre-Teils)



X wohlordenbar

falls ein $R \subseteq X \times X$

ex. mit (X,R)

Wohlordnung.

SEMINAR
DESKRIPTIVE
MENGENLEHRE
Juli/Aug 2021
Blockseminar Khomskii

Bitte bis morgen melden!

Ist jede Menge wohlordenbar? ZWOS

Theorem (Zermeloscher Wohlordnungssatz)

Jede Menge ist wohlordenbar.

ABER: ZWOS kann nicht in Z + EtS bewiesen werden; wir brauchen ein zusätzliches Axiom.

WOHLORDENBARKEIT

Prop. Äq. sind:

(1) X ist wohlordenbar

(2) es ex. Ord.z. α und $f: X \longrightarrow \alpha$ injektiv.

Beweis (1) $\Rightarrow$ (2)

Falls (X,R) Wohlordnung, so ex. nach RSWO ein α mit $(X,R) \cong (\alpha, \in)$. Also $X \sim \alpha$, also $X \preccurlyeq \alpha$.

(2) $\Rightarrow$ (1)

Falls $f: X \longrightarrow \alpha$ Injektion, betrachte $Y := \mathrm{Bild}(f) \subseteq \alpha$. Also ist $(Y, \in)$ eine Wohlordnung und $f: X \longrightarrow Y$ ist Bijektion.

Definiere $x_1 R x_2 :\Longleftrightarrow f(x_1) \in f(x_2)$.

Dann ist $f: (X,R) \cong (Y, \in)$.

q.e.d.

Konsequenz

Die wohlordenbaren Mengen erben die angenehmen Eigenschaft von Ordinalzahlen.

z.B. Cantor-Schröder-Bernstein

$$X \preccurlyeq Y \ \& \ Y \preccurlyeq X \implies X \sim Y.$$

Falls X, Y wohlordenbar sind, folgt dies unmittelbar:

mit κ, λ Kardinalzahlen

$$X \sim \kappa$$

$$Y \sim \lambda$$

(Da X, Y wohlordenbar)

$$\kappa \leq \lambda \quad \text{oder} \quad \lambda \leq \kappa$$

$$\implies \kappa \preccurlyeq \lambda \quad \text{oder} \quad \lambda \preccurlyeq \kappa$$

Falls $f : X \longrightarrow \kappa$, $g : Y \longrightarrow \lambda$ Bijektionen und OBdA $\kappa \leq \lambda$

Dann gilt $g^{-1} \circ f : X \longrightarrow Y$ ist Injektion.

[Falls $\lambda \leq \kappa$: $f^{-1} \circ g : Y \longrightarrow X$ ist Inj.]

Das Auswahlaxiom

Def. Sei X eine Menge. Dann heißt

$$c : X \longrightarrow \bigcup X$$

eine Auswahlfunktion für X falls für alle $x \in X$, falls $x \neq \emptyset$,

so $$c(x) \in x.$$

Auswahlaxiom (AC : AXIOM OF CHOICE)

Jede Menge hat eine Auswahlfunktion.

Bem. Im Gegensatz zu anderen Axiomen liefert das AC NICHT eine eindeutig definierte Menge, sondern sagt nur, daß es Auswahlfkt. gibt, nicht wie diese aussehen.

Varianten

Sei I eine Indexmenge. Dann nennen wir eine Funktion F mit $\mathrm{Def}(F) = I$ eine (durch I) indizierte Familie. Dann heißt c eine indizierte Auswahlfunktion falls $\mathrm{Def}(c) = I$ und f.a. $i \in I$ gilt

$$F(i) \neq \emptyset \implies c(i) \in F(i)$$

Wir nennen die folgende Aussage das indizierte Auswahlaxiom: (iAC)

Jede indizierte Familie hat eine indizierte Auswahlfunktion.

Prop. $AC \iff iAC$.

"$\Leftarrow$". Falls X eine Menge ist, so definiere $I := X$ und $F(i) := i$. Dann ist eine indizierte Auswahlfkt. für F einfach eine Auswahlfkt. für X.

"$\Rightarrow$". Falls F mit $\mathrm{Def}(F) = I$ eine indizierte Fam. ist, betrachte

$$\mathrm{Bild}(F) = \{F(i) ; i \in I\}$$

Sei c eine Auswahlfkt. für $\mathrm{Bild}(F)$. Dann ist $c \circ F$ eine indiz. Ausw.fkt. für F. qed

Sie finden in der Literatur auch:
die Produktvariante des AC

Falls I Indexmenge und f.a. $i \in I$ $X_i \neq \emptyset$

so ist $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$.

[Was ist eigentlich $\prod_{i \in I} X_i$? Eine Fkt., die jedem Index $i \in I$ ein Element aus X_i zuweist? Dann ist $\prod_{i \in I} X_i$ nichts anderes als die Menge der indizierten Auswahlfunktionen für die ind. Familie $i \longmapsto X_i$.]

Man beachte: $Y \subseteq X$
und $c : X \longrightarrow \bigcup X$ Auswahlfkt.

Dann ist $c \restriction Y : Y \longrightarrow \bigcup X$ eine Auswahlfunktion für Y.

Proposition Äquivalent sind:

(1) AC

(2) Für jede Menge Y hat $\mathrm{Pot}(Y)$ eine Auswahlfunktion.

Beweis. (1) $\Longrightarrow$ (2) offensichtlich.

(2) $\Longrightarrow$ (1). Sei X beliebig. Setze $Y := \bigcup X$. Nach (2) existiert eine Auswahlfkt. für $\mathrm{Pot}(Y)$. Da $X \subseteq \mathrm{Pot}(Y)$, gilt also, daß eine Auswahlfkt. für X existiert. q.e.d.

Theorem ZWOS $(Z + \mathrm{Ers} + AC)$

Jede Menge ist wohlordenbar.

Beweis Sei X beliebige Menge.

Reicht zu zeigen, daß $X \preceq \alpha$ für eine Ord.-z. α.

Sei $c : \mathrm{Pot}(X) \longrightarrow X$ eine Auswahlfunktion.

Sei $\kappa := H_X$ das Hartogs-Aleph von X.

[Dies ist die Verwendung des Ers.axioms.]

$\kappa := H_X$

$c : \mathrm{Pot}(X) \longrightarrow X$ Auswahlfunktion

$[\emptyset \neq Z \subseteq X \implies c(Z) \in Z]$

Wir definieren auf κ per Rekursion

$$g(\alpha) := \begin{cases} c(X \setminus \mathrm{Bild}(g \restriction \alpha)) & \text{falls } X \setminus \mathrm{Bild}(g \restriction \alpha) \neq \emptyset \\ \text{STOP} & \text{sonst} \end{cases}$$

Falls $\text{STOP} \notin \mathrm{Bild}(g \restriction \alpha)$ $[\alpha \leq \kappa]$

(*) $\implies g \restriction \alpha$ injektiv

[Klar, nach Konstruktion.]

$\implies \text{STOP} \in \mathrm{Bild}(g)$, sonst wäre g injektiv im Widerspruch zur Wahl von κ.

Sei $\mu < \kappa$ minimal mit $g(\mu) = \text{STOP}$

Dann ist also $\boxed{g \restriction \mu \text{ injektiv.}}$ nach (*)

Nach Def.: Falls $g(\mu) = \text{STOP}$, so ist

$X \setminus \mathrm{Bild}(g \restriction \mu) = \emptyset$

$\longrightarrow \boxed{\mathrm{Bild}(g \restriction \mu) = X}$

$\boxed{g \restriction \mu : \mu \sim X}$

Also ist X wohlordenbar.

q.e.d.

Frage: Können wir ZWOS ohne AC beweisen.

1. Antwort: Wir werden sehen, daß Z + Ers beweist: ZWOS ⇒ AC.

Das bedeutet: es gibt keine Modelle von

$$Z + Ers + ZWOS + \neg AC$$

2. Antwort: Aber: Falls ZWOS und AC jeweils bereits aus Z + Ers folgen würden, dann wäre die 1. Antwort simpler.

Dies war eine große offene Frage und wurde von Cohen 1963 mit der Methode des Forcing gelöst.

Cohen erhielt dafür die Fields-Medaille.

[Jenseits der Methoden dieser Vorlesung.]

Theorem ZWOS $\Longrightarrow$ AC.

Beweis Sei X beliebig. Nach ZWOS ex. ex R so daß (X,R) Wohlordnung.

d.h. für $Z \neq \emptyset$, $Z \subseteq X$ ex. eine R-minimales Elt.

$$c(Z) := \begin{cases} \emptyset & \text{falls } Z = \emptyset \\ x & \text{falls } x \text{ das } R\text{-minimale Elt. von } Z \text{ ist.} \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{c(Z) \in Z}$$

Somit ist c eine Auswahlfunktion für $\mathrm{Pot}(X)$. Somit gilt AC nach voriger Proposition.

q.e.d.

Bem. Das AC ist mit Sicherheit das kontroverseste Axiom, denn es hat sowohl wünschenswerte als auch sehr unangenehme Konsequenzen:

WÜNSCHENSWERT:
- Jeder VR hat eine Basis. [Zornsches Lemma G11]
- Jeder Körper hat einen alg. Abschluß.
- Satz von Hahn-Banach.
- Äquivalenz von Stetigkeit und Folgenstetigkeit.
- Vergleichbarkeit: $\forall X, Y \quad X \preceq Y$ oder $Y \preceq X$.

UNERWÜNSCHT:
- Existenz einer nicht-Lebesgue-meßbaren Menge.
- Banach-Tarski Zerlegungssatz

Vergleichbarkeit (VP)

$$\forall X, Y \quad X \preccurlyeq Y \text{ oder } Y \preccurlyeq X.$$

Es ist klar nach dem, was wir eingangs über wohlordenbare Mengen gesagt haben, daß VP aus ZWOS folgt, also aus AC.

Beweis von <u>VP $\Longrightarrow$ ZWOS</u>:

Sei X beliebig. Setze $\kappa := \aleph_X$ das Hartogs-Aleph.

Dann gilt $\aleph_X \not\preccurlyeq X$, also nach VP $\boxed{X \preccurlyeq \aleph_X}$

Aber $\aleph_X$ ist Ordinalzahl, also ist X wohlordenbar.

q.e.d.

Zwei letzte Bemerkungen zur Mengenlehre

① KONTINUUMSHYPOTHESE.

Wir hatten Cantors Theorem gesehen:

$$\mathrm{Pot}(X) \not\precsim X.$$

Mit AC / ZWOS wissen wir, daß

$\mathrm{Pot}(X) \sim \kappa$, κ Kardinalzahl.

Falls X unendlich, so $\mathrm{Pot}(X) \sim \aleph_\alpha$ für ein eind. α.

z.B. $\underline{\mathrm{Pot}(\mathbb{N})} \sim \aleph_\alpha$.

mit $\alpha \geq 1$.

Cantor Frage: Was ist α?

Hypothese: $\alpha = 1$.

Die Axiome der Mengenlehre beantworten Cantors Frage nicht!

② Es fehlt noch ein Axiom:

Fundierungsaxiom

Fundierungsaxiom (Fund):

Jede nicht leere Menge besitzt ein $\in$-minimales Element.

Also:

$$\forall X\Big(X \neq \emptyset \;\to\; \exists x\,(x \in X \wedge \neg\exists y\,(y \in X \wedge y \in x))\Big),$$

d. h.

$$\forall X(X \neq \emptyset \;\to\; \exists x\,(x \in X \wedge x \cap X = \emptyset)).$$

(a) Das Fundierungsaxiom ist schwer intuitiv zu begründen.

(b) Es spielt außerhalb der technischen Mengenlehre fast keine Rolle.

$\boxed{ZF}$ Zermelo-Fraenkel

$Z + Ers + Fund$

$\boxed{ZFC}$ $ZF + AC$