MLML XVIII

14. Juni 2021

(RSWO)

REPRÄSENTATIONSSATZ FÜR WOHLORDNUNGEN

(Z + Ers) Jede Wohlordnung ist isomorph zu einer eindeutig bestimmten Ordinalzahl.

ERINNERUNG

Online-Klausur 21. Juli 2021, 15^{45} – 17^{45}

Das Ersetzungsaxiom ist notwendig für den RSWO; mehr noch, bereits für die Existenz einer Ordinalzahl α s.d.

$$(\alpha, \in) \cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <)$$

benötigt das Ersetzungsaxiom.

?

Keine Vorlesung am 12.7.
Keine Übung am 13.7
Letzte Übung: 6.7.
Letzte VL XXV: 8.7.

G10	15.6	H/P10	22.6.
G11	22.6.	H/P11	29.6
G12	29.6	H/P12	6.7.
G13	6.7		—

Vgl. FST "beweist nicht die Existenz von $\mathbb{N}$"

DAS SOLL HEISSEN:

Es ex. $\mathfrak{A}_\infty \models$ FST, in dem keine induktive Menge existiert.

Ebenso:

Z beweist nicht G_S.

DAS SOLL HEISSEN:

Es ex. $\underset{\underset{(U,\in)}{\shortparallel}}{\mathcal{U}} \models Z$ mit $\omega \notin U$,

also keine Menge in U enthält alle Elemente von ω.

$\longrightarrow$ Gruppenarbeit G10.

[Erinnern Sie sich an "Geburtsdaten".]

Es gibt zwei Typen von Ordinalzahlen:

$\alpha = S(\beta)$ NACHFOLGERORDINALZAHLEN

Diese haben immer β als größtes Element.

α ist nicht von dieser Form — Diese haben kein größtes Element.

LIMESORDINALZAHLEN

Hier gilt: $\alpha = \bigcup \alpha$

Sonderfall: $\alpha = 0$

Andere Bsp. ω oder die Ord.z. isom. zu $W_2, W_3, W_4, \ldots$

die W_n aus G9

<u>Theorem</u> (TRANSFINITE INDUKTION)

Sei α eine Ordinalzahl.

Sei $Z \subseteq \alpha$ mit

Spezialfall von (3)

$\boxed{(1) \quad 0 \in Z}$

(2) falls $\beta \in Z$, so $S(\beta) \in Z$

(3) falls λ Limesordinalzahl $< \alpha$ und $\lambda \subseteq Z$, dann $\lambda \in Z$.

Dann gilt $Z = \alpha$.

<u>Beweis</u> Ang. nicht. $\alpha \setminus Z \neq \emptyset$. Finde $\beta \in \alpha \setminus Z$ minimal. Wegen (1) ist $\beta \neq 0$.

Falls $\beta = S(\gamma)$, dann ist $\gamma \in Z$ wg. Minimalität von β. Also nach (2), $S(\gamma) = \beta \in Z$.

Falls β Limesordinal, wg. Min. $\beta \subseteq Z$, also nach (3) $\beta \in Z$. Widerspruch!

q.e.d.

<u>Bemerkung</u> (1) ist nicht wirklich nötig, weil es ein Spezialfall von (3) ist. In der Praxis ist der Fall $\beta = 0$ aber oft sehr speziell und es lohnt sich, ihn separat zu behandeln.

<u>Theorem</u> (TRANSFINITE REKURSION)

Sei α eine Ordinalzahl und seien x eine Menge, F, G zweistellige Operationen.

Dann existiert eine eindeutig Fkt. f mit $\mathrm{Def}(f) = \alpha$ und

$$f(0) = x$$
$$f(S(\beta)) = F(f(\beta))$$
$$f(\lambda) = G(f \upharpoonright \lambda)$$

$\lambda \neq 0$ Limesordinalzahl

[Wende Allg. Rekursionssatz auf die Formel

$$(u,v) \in H :\Longleftrightarrow (u = 0 \wedge v = x) \vee (u = S(\beta) \wedge v = F(f(\beta))) \vee (u \text{ ist Limes} \neq 0 \wedge v = G(f \upharpoonright u))$$

an.]

<u>**BEMERKUNG**</u> Falls $\alpha < \alpha'$ und f^{α} die rekursiv def. Fkt auf α und $f^{\alpha'}$ die rekursiv def. Fkt auf α' ist, so gilt $f^{\alpha'} \upharpoonright \alpha = f^{\alpha}$.

Dies erlaubt es uns, transfinite Rekursion als Definitionsprinzip auf den Ordinalzahlen zu verstehen.

$$\boxed{\begin{aligned} f(0) &= x \\ f(S(\beta)) &= F(f(\beta)) \\ f(\lambda) &= G(f \upharpoonright \lambda) \end{aligned}}$$

definiert eine Funktion f^α mit $\mathrm{Def}(f^\alpha) = \alpha$ für jedes α und die verschiedenen f^α stimmen auf dem Schnitt ihrer Definitionsbereiche überein.

Somit können wir schreiben

$$f(\gamma) := f^\alpha(\gamma) \quad \text{für ein beliebiges } \alpha > \gamma.$$

Bsp. ORDINALZAHLARITHMETIK

ADDITION

$\alpha + 0 := \alpha$

$\alpha + S(\beta) := S(\alpha + \beta)$

$\alpha + \lambda := \bigcup \{\alpha + \xi ; \xi \in \lambda\}$

λ Limes $\neq 0$

MULTIPLIKATION

$\alpha \cdot 0 := 0$

$\alpha \cdot S(\beta) := \alpha \cdot \beta + \alpha$

$\alpha \cdot \lambda := \bigcup \{\alpha \cdot \xi ; \xi \in \lambda\}$

λ Limes $\neq 0$

Fälle 0 und NF: GRASSMANN-Gleichungen auf $\mathbb{N}$

Limesfall: Anders.

Bemerkung. Bereits auf $\mathbb{N}$ gab es eine Asymmetrie:
LINKS ist konstant,
RECHTS ist die Rekursionsvariable.
Diese Asymmetrie hat keine substantiellen Konsequenzen auf N.
Nun kommt eine zusätzliche Asymmetrie hinzu: In welchem Fall der dreigliedrigen Fallunterscheidung wir sind hängt nur von RECHTS ab.

<u>Bsp.</u> $1 = S(0)$

$$\begin{aligned} \omega+1 &= \omega + S(0) \\ &= S(\omega+0) \\ &= S(\omega) = \omega \cup \{\omega\}. \end{aligned}$$

[Es gilt immer: $S(\alpha) = \alpha+1$. Wir schreiben üblicherweise $\alpha+1$ statt $S(\alpha)$, wenn wir über Ord.-z. reden.]

Insbesondere: $\underline{\omega \in \omega+1} = \omega \cup \{\omega\}$.

Im Kontrast:

$$\underline{1+\omega} = \bigcup \{1+\xi \,;\, \underbrace{\xi \in \omega}_{\text{nat. Zahlen}}\}$$

$$= \bigcup \{1+n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$$

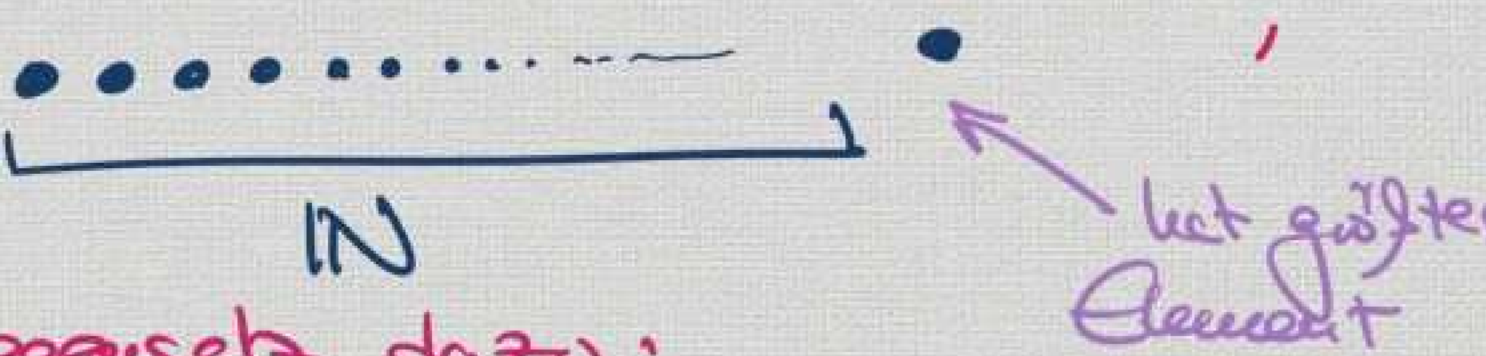
$$= \mathbb{N} = \underline{\omega}.$$

!! $1+\omega = \omega < \omega+1$

$\Longrightarrow$ + ist nicht kommutativ auf den Ordinalzahlen.

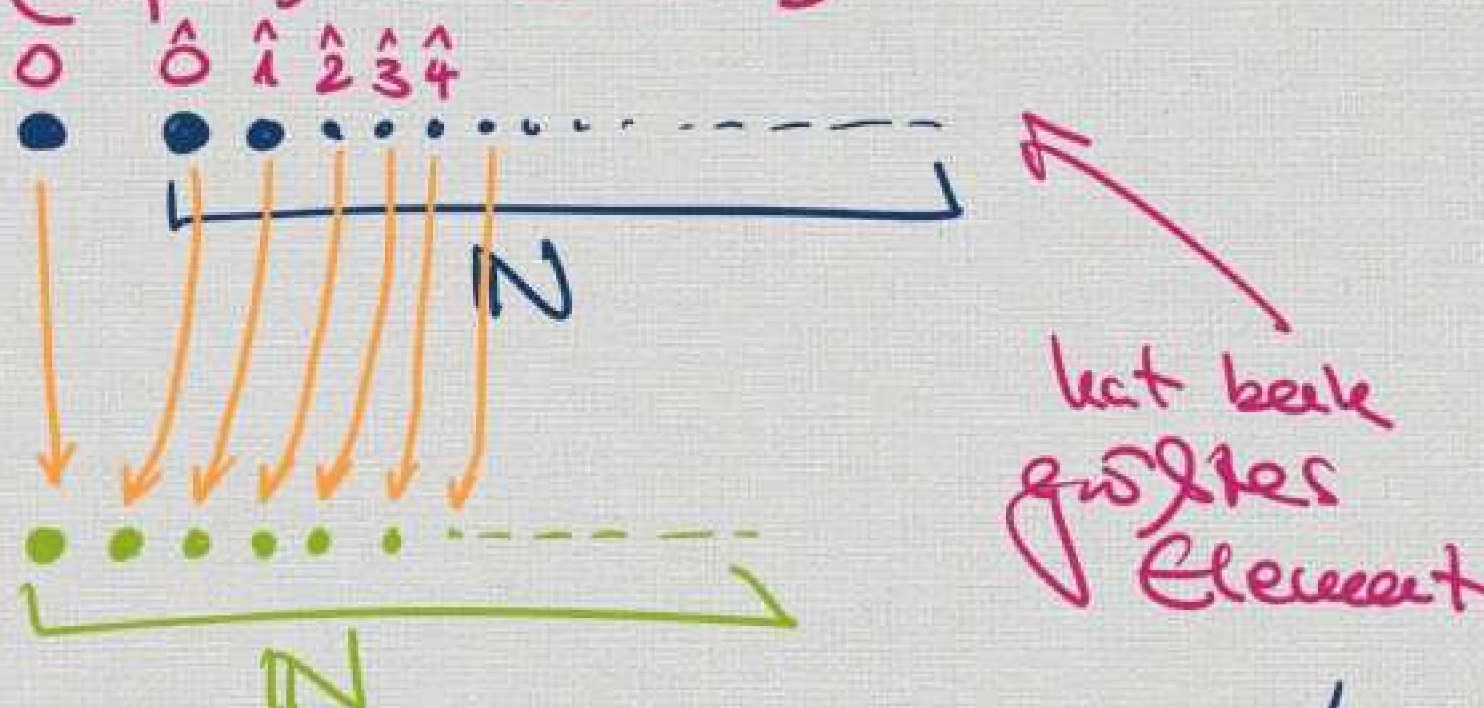
Dies sollte uns nicht überraschen:

$$(\mathbb{N},<) \oplus (1,<) \cong (\omega+1, \in)$$



Im Gegensatz dazu:

$$(1,<) \oplus (\mathbb{N},<)$$



$$(\mathbb{N},<) \oplus (1,<) \not\cong (1,<) \oplus (\mathbb{N},<)$$

$$0 \longmapsto 0$$

$$\hat{n} \longmapsto n+1$$

Isomorphismus zw. $(1,<) \oplus (\mathbb{N},<)$ und $(\mathbb{N},<)$.

Bsp. $2 = S(1) = S(S(0))$

$$\underline{\omega\cdot 2} = \omega \cdot S(1)$$
$$= \omega\cdot 1 + \omega$$
$$= \omega\cdot S(0) + \omega$$
$$= (\omega\cdot 0 + \omega) + \omega$$
$$= (0 + \omega) + \omega$$
$$= \underline{\omega + \omega}$$

$$(\omega+\omega, \in) \cong (\mathbb{N}, <) \oplus (\mathbb{N}, <)$$

$$2\cdot\omega = \bigcup \{2\cdot\xi \,;\, \xi \in \omega\}$$
$$= \bigcup \{2\cdot n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$$
$$= \mathbb{N} = \omega$$

$$2\cdot\omega = \omega < \omega\cdot 2$$

[Wie bei der Addition überlegen Sie sich, warum $(\mathbb{N}, <) \otimes (2, <) \not\cong (2, <) \otimes (\mathbb{N}, <)$]

Burali-Forti sagte:

"Es gibt viele Ordinalzahlen."

Das impliziert nicht, daß es große Ordinalzahlen gibt.

Bsp. Es ex. keine Menge aller Einermengen, aber sie sind alle klein.

Besorgniserregend:

Falls α und β beide abzählbar, so ist sowohl $\alpha+\beta$ abzählbar als auch $\alpha\cdot\beta$.

[$\alpha+\beta$: Sei f Bij. zw. α und $\mathbb{N}$
g Bij. zw. β und $\mathbb{N}$

Schicke $\gamma \longmapsto 2f(\gamma)$ falls $\gamma\in\alpha$

$\alpha+\delta \longmapsto 2g(\delta)+1$ falls $\delta\in\beta$.

$\alpha\cdot\beta$: f Bij. zw. α und $\mathbb{N}$
g Bij. zw. β und $\mathbb{N}$

Punktweise Bij. zw. $\alpha\times\beta$ und $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.]

In der Tat gilt: (Z + Ers)

3.2 Satz von Hartogs. $\forall x\, \exists \alpha\, \neg\exists f\ f : \alpha \overset{inj}{\to} x.$

Ord.z.

Koroller Es ex. überabzählbare Ordinalzahlen.

[Setze $x := \mathbb{N}$.]

Es ist nötig um den Satz von Hartogs zu beweisen; wir werden im Beweis den RSWO verwenden!

Beweis Fixiere eine Menge x. Definiere dafür

$$S_x := \{(A,R) ; A \subseteq x \text{ und } R \subseteq A \times A\}$$

Menge aller Strukturen mit einer binäre Relation auf einer Teilmenge von x.

Diese Menge existiert bereits in FST.

Operation

$$F_x(z) := \begin{cases} \alpha & \text{falls } z \in S_x \text{ und } z \cong (\alpha, \in) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Mit dem Ersetzungsaxiom bilden wir nun

$$H_x := \{F_x(z) ; z \in S_x\}$$

Was wissen wir über H_x?

① Alle Elt. von H_x sind Ordinalzahlen.

② Falls α Ord.z., so gilt

$$\alpha \in H_x \Longleftrightarrow \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow{\text{inj}} x \right)$$

[$\Longrightarrow$ einfach die Def. von H_x.

$\Longleftarrow$ Ang. $f : \alpha \xrightarrow{\text{inj}} x$

setze $A := \mathrm{Bild}(f) \subseteq x$

$R := \{ (f(\beta), f(\gamma)) \, ; \, \beta \in \gamma \}$

Dann ist f ein Isomorphismus von $(\alpha, \in)$ nach (A, R).

$(A, R) \in S_x \Longrightarrow \alpha \in H_x$.]

Dies beschreibt H_x als die Menge der Ord.z., die in x injiziert werden können.

<u>Beh.</u> H_x ist transitiv.

[Falls $\beta \in \alpha \in H_x \overset{②}{\Longrightarrow} \exists f \left(f : \alpha \xrightarrow{\text{inj}} x \right)$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad$ $\Downarrow$

$\beta \subseteq \alpha \longrightarrow \exists f' \left(f' : \beta \xrightarrow{\text{inj}} x \right)$

$\Downarrow$ ②

$\beta \in H_x$.]

$\Longrightarrow H_x$ ist eine Ordinalzahl.

__Beh.__ Es gibt keine Inj. von H_x nach x.

[Ang. doch. Dann gilt nach ②, $H_x \in H_x$. ↯]

q.e.d.

__Bem.__ Vermittels ② zeigt der Beweis von Hartogs mehr als nur die Existenz eines solchen α. Die Zahl H_x (auch bezeichnet als das HARTOGS-Aleph von x) ist die Menge aller in x injizierbaren Ordinalzahlen und somit die kleinste nicht in x injizierbare Ordinalzahl.

(H9.1) Sei κ eine Ordinalzahl. Zeigen Sie, daß die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Bijektion zwischen α und κ existiert.
(ii) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Injektion von κ nach α existiert.
(iii) Es gibt kein $\alpha < \kappa$, so daß eine Surjektion von α nach κ existiert.

Def. Eine Ordinalzahl κ heißt INITIAL (oder auch KARDINALZAHL), falls sie eine / alle der Bedingungen in H9.1 erfüllt.

In dieser Terminologie zeigt der Beweis von Hartogs, daß

H_X eine initiale Ordinalzahl

ist.

Prop. Falls A eine Menge von initialen Ordinalzahlen ohne größtes Element ist, so ist $\kappa := \bigcup A$ eine initiale Ordinalzahl mit:

f.a. $\alpha \in A$ gilt $\alpha \in \kappa$.

<u>Beweis.</u> Ang. nicht.

Dann ex. $\alpha \in \kappa = \bigcup A$ mit Inj. von κ nach α.

Dann ex. $\beta \in A$ mit $\alpha \in \beta$.

β ist initiale Ordinalzahl.

Dann haben wir

$$\kappa \xrightarrow{\text{inj.}} \alpha$$

und

$$\beta \xrightarrow{\text{inj}} \kappa = \bigcup A$$

$$\Rightarrow \beta \subseteq \kappa$$

Somit $\beta \xrightarrow{\text{inj}} \alpha$ im Wid. zur Annahme, daß β initiale Ord.-z. ist.

q.e.d.

Am Donnerstag führen wir die Aleph-Hierarchie mit Hilfe der beiden Operationen ein, die initiale Ord.z. erzeugen:

$x \longmapsto H_x$ ← NF-Schritt

$A \longmapsto \bigcup A$ ← Limes-Schritt

in einer transfiniten Rekursion