MLML XVII

10. Juni 2021 SS 2021

(1) Falls X WORM, so ist $(X, <)$ Wohlordnung.

(2) A ist Ordinalzahl gdw A transitiv & $(A, \in_A)$ Wohlordnung

(3) α Ordinalzahl: (a) $\alpha \notin \alpha$
(b) $\alpha \in \beta \Rightarrow \alpha < \beta$

(4) α, β Ord.z. : $\alpha \in \beta$ oder $\alpha = \beta$ oder $\beta \in \alpha$

Bei Wohlordnung i.a. steht hier $\cong$!

Korollar 1 Jede Menge von Ordinalzahlen ist ein WORM.

[Folgt direkt aus (4).]

Korollar 2. Jede transitive Menge A von Ord.z. ist eine Ordinalzahl.

[Nach Kor. 1. ist A ein WORM. Nach (1) ist also $(A, <)$ eine Wohlordnung. Also nach (3b) ist $(A, \in)$ eine Wohlordnung. Also nach Definition eine Ordinalzahl.]

KLAUSURTERMIN 21. Juli 2021

Theorem (Burali-Forti)

Es gibt keine Menge aller Ordinalzahlen.

Beweis Ang. A sei die Menge aller Ordinalzahlen. Falls wir zeigen können, daß A transitiv ist, so folgt nach Kor. 2, daß A eine Ordinalzahl ist, also $A \in A$ im Widerspruch zu (Ba).

Sei also nun $x \in y \in A$. Da Elemente von Ord. z. Ord. z. sind, ist damit x Ord. z., also $x \in A$.

Also ist A transitiv. q.e.d.

INTERPRETATION

"Es gibt unübersehbar viele Ordinalzahlen".

Das Problem am Ende von VL $\underline{XVI}$.

Bsp. für Ordinalzahlen

0

1

2

$\vdots$

$n \in \mathbb{N}$

$\vdots$

$\mathbb{N} = \omega$

$(\mathbb{N},<) \oplus (1,<) \cong S(\omega) = \omega + 1$

$(\mathbb{N},<) \oplus (2,<) \cong S(\omega+1) = \omega + 2$

$\vdots$

$(\mathbb{N},<) \oplus (n,<) \cong \omega + n$

$\vdots$

Jedes einzelne von diesen ist definiert durch:

$\varphi(n,\alpha) \longleftrightarrow$ α ist die eindeutig bestimmte Ord.z. mit $\alpha \setminus \omega$ ist in Bijektion mit n.

Was müßte hier stehen?

$(\mathbb{N},<) \oplus (\mathbb{N},<)$?

$=$

$\aleph_2$

[G9]

$\alpha = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots, \omega+n, \ldots\}$

$= \mathbb{N} \cup \{\omega + n ; n \in \mathbb{N}\}$

Ist dies eine Menge?

Nebenbemerkung

Z beweist, daß für alle n ein α ex. mit

$$\varphi(n,\alpha).$$

und dies eindeutig ist:

1. Existenz

$$Z := \{ n \in \mathbb{N} ; \exists \alpha \ \varphi(n,\alpha) \}$$

Zeigen Sie per Ind., daß $Z = \mathbb{N}$.

2. Eindeutigkeit.

Falls α, α' mit $\varphi(n,\alpha)$ und $\varphi(n,\alpha')$ so liefert die Bij. zw. $\alpha \setminus \omega$ und $\alpha' \setminus \omega$ und die Identität auf ω einen Iso. zw. $\alpha \cong \alpha'$. Also $\alpha = \alpha'$.

Wie könnten wir in der Zermelomengenlehre Z die Menge

$$X = \{\omega + n ;\ n \in \mathbb{N}\}$$

erhalten?

$\omega + n \subseteq \omega + n + 1$

Ext X

Pot X

Vereinigungsaxiome $X = \bigcup Y$ X

Aussonderung: Falls X durch Aus erzeugt ist, so muß es aus einer Obermenge von X ausgesondert werden.

Fazit: Wir sehen nicht, wie man dies in Z macht.

Andere Idee: Können wir $n \overset{H}{\longmapsto} \omega + n$ rekursiv definieren?

$$\boxed{\begin{aligned} H(0) &:= \omega \\ H(n+1) &:= S(H(n)) \end{aligned}}$$

ACHTUNG: Unser Rekursionssatz verlangt, daß die Rekursionsfunktion in eine fest vorgegebene Menge Z geht.

Das hier benötigte Z wäre genau die gesuchte Menge.

§III.5 Ebbinghaus

Schema der Ersetzungsaxiome (Ers): Das Schema enthält zu jedem Ausdruck der Gestalt $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ aus der ursprünglichen Mengensprache das Axiom

n+2 freie Variablen

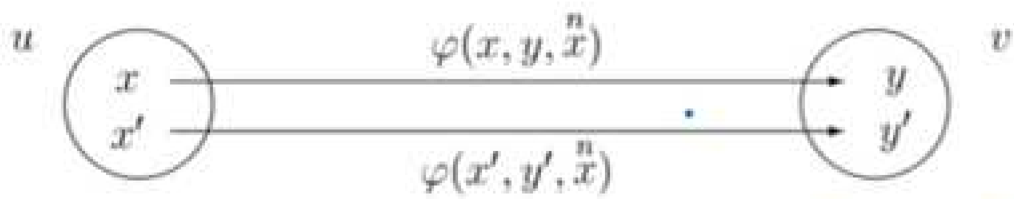
Für alle $x_1, \ldots, x_n$: Wenn es zu jedem x genau ein y gibt mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$, so gibt es zu jedem u ein v, das zu jedem $x \in u$ das y mit $\varphi(x, y, \overset{n}{x})$ enthält.

φ ist funktional

Also:

$$\forall \overset{n}{x} \Big(\forall x \, \exists^{=1} y \, \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \;\to\; \forall u \, \exists v \, \forall xy \, \big(x \in u \wedge \varphi(x, y, \overset{n}{x}) \to y \in v\big)\Big).$$

Bildlich:



Ebbinghaus-Notation

$$\varphi(x, y, \overset{n}{x}) = \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$

Erst 1922 fiel Fraenkel und Skolem auf, daß die Zermelo'sche Mengenlehre dieses Mengenbildungsprinzip fehlt.

φ heißt **funktional** falls f.a. $x, y, y', x_1, \ldots, x_n$ gilt:

$$\varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n) \wedge \varphi(x, y', x_1, \ldots, x_n) \to y = y'$$

Ebbinghaus nennt so etwas auch eine zweistellige Operation und schreibt

$$F(x) = y \;:\Longleftrightarrow\; \varphi(x, y, x_1, \ldots, x_n)$$

ACHTUNG: Obwohl die Notation aussieht, als sei F eine Funktion, ist sie es i.d.R. nicht.

IN WORTEN:

Ist φ eine funktionale Formel, geschrieben als zweistellige Operation F und ist U eine Menge, dann können wir F auf den Definitionsbereich U einschränken und der Bildbereich

$$B := \{F(x) ; x \in U\}$$

ist ebenfalls eine Menge.

Also $f : U \longrightarrow B$ definiert durch $f(x) := F(x)$ ist eine Funktion.

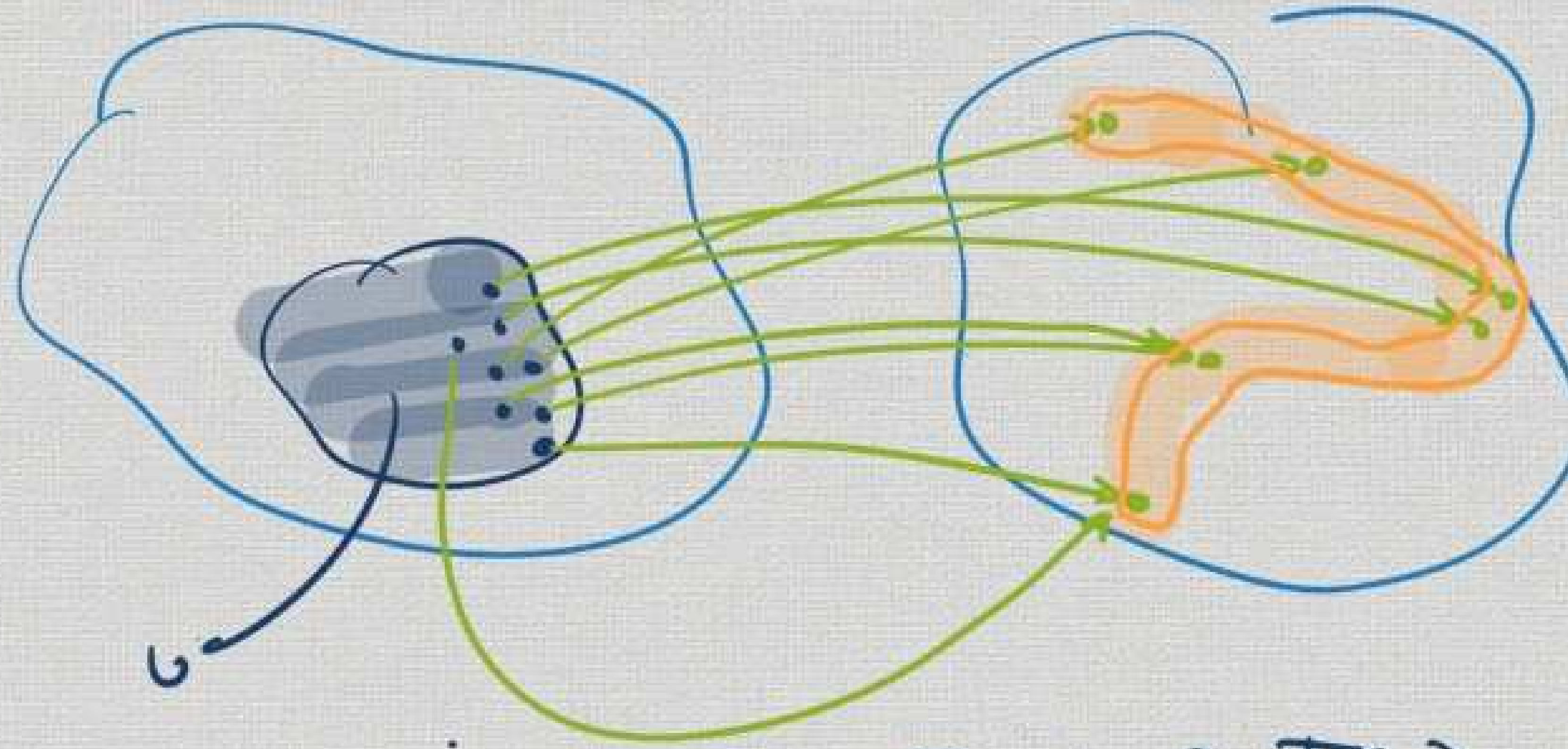
Falls F aussieht wie eine Fkt., so ist die Einschränkung von F auf eine Menge eine Fkt.

Zum Namen:

Wir sehen, daß das Ersetzungsaxiom für zweistellige Operationen F und Menge U die Existenz der Menge

$$B := \{F(x) ; x \in U\}$$

liefert.



Jedes $x \in U$ wird in B durch $F(x)$ ersetzt.

Anwendung

Finde die Menge $\{\underline{\omega}+n;\ n\in\underline{\mathbb{N}}\}$

Idee:

$\varphi(n,\alpha) :\Longleftrightarrow \alpha\setminus\omega$ ist n Bij. zu n.

$$\Phi(x,y) :\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{N} \wedge y\setminus\omega \text{ ist in Bij. zu } x \\ x\notin\mathbb{N} \wedge x=y. \end{cases}$$

Diese Formel Φ ist funktional und erfüllt die Bedingung des Ersetzungsaxioms.

$$F(x):=y \quad :\Longleftrightarrow \Phi(x,y)$$

zweistellige Operation

Setze nun $U:=\mathbb{N}$ und erhalte

$$B:=\{F(x);\ x\in U\}$$

mit Ersetzung.

Damit ist $\alpha:=\mathbb{N}\cup B$ eine Ordinalzahl isomorph zu $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$.

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathbb{N},<) & \oplus & (\hat{\mathbb{N}},<) \\
n & & \hat{n} \\
\downarrow & & \downarrow \\
n & & \omega+n
\end{array}
$$

$$\alpha = \mathbb{N} \cup \{\omega+n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$$

Diese Lösung des Problems für $(\mathbb{N},<)\oplus(\mathbb{N},<)$ ist nur ein Spezialfall einer allgemeinen Lösung:

(G9) $$\mathfrak{N}_n = \underbrace{(\mathbb{N},<)\oplus\ldots\oplus(\mathbb{N},<)}_{n\text{-mal}}$$

Falls $\alpha \cong \mathfrak{N}_2$,

so ist $S(\alpha) \cong \mathfrak{N}_2 \oplus (1,<)$

$S(S(\alpha)) \cong \mathfrak{N}_2 \oplus (2,<)$

Somit erhalten wir $\alpha+n$ für $n\in\mathbb{N}$

$\beta := \{\alpha+n \,;\, n\in\mathbb{N}\}$

$\beta \cong \mathfrak{N}_3$.

VII

1.1 Lokales Rekursionstheorem (Schema)**.** Es sei F eine zweistellige Operation. Dann gilt:

$\mathrm{Def}(f) = a$

$$(a, r) \text{ fundierte Struktur} \rightarrow \exists^{=1} f\,(f \text{ ist auf } a \text{ definierte Funktion} \wedge \forall u\,(u \in a \rightarrow f(u) = F(u, f\upharpoonright r[u]))).$$

ALLGEMEINER REKURSIONSSATZ

Er ist allgemeiner als der vorige Rekursionssatz:

(1) Definitionsbereich ist beliebige fundierte Struktur
[im Gegensatz zu: $(\mathbb{N}, <)$]

(2) Rekursionsgleichung verwendet nicht nur den Vorgängerwert, sondern den gesamten Werteverlauf auf $r[u]$

* (3) WICHTIGSTE VERALLGEMEINERUNG

Keine Vorgabe einer festen Menge Z, so daß $f : a \rightarrow Z$ gewünscht ist.

Erinnerung an den Standardbeweis:

Vier Schritte

Schritt 1 Definition Kaine.

Schritt 2 Kaine stimmen auf ihrem gemeinsamen Def.bereich überein

Schritt 3 Jeder Punkt von a ist im Definitionsbereich eines Kains.

Schritt 4 Aussondern aus $a \times Z$.

Beweis Schritt 1

g sei ein KEIM falls g eine Fkt ist, ein $u \in a$ existiert mit

$$\mathrm{Def}(g) = r[u]$$

und für alle $v \in r[u]$ gilt

$$g(v) = F(v, g \restriction r[v])$$

Schritt 2 + 3

Lemma 1 Falls g, g' Keime mit $u \in \mathrm{Def}(g) \cap \mathrm{Def}(g')$, so ist $g(u) = g'(u)$.

Lemma 2 Für jedes $u \in a$ ex. ein Keim g mit $u \in \mathrm{Def}(g)$.

[leichte Anwendung des Prinzips des kleinsten Elements auf der fundierten Struktur (a, r).] !!!

<u>Schritt 4</u> Wir würden gerne aussondern nach der Formel

$$\Psi(x,y) :\Longleftrightarrow \text{es ex. Keim } g \text{ mit } x \in \mathrm{Def}(g) \text{ und } g(x) = y.$$

Dafür brauchen wir ein Z, welches die Bildbereiche aller Keime enthält.

Setze nun $\Phi(x,y) :\Longleftrightarrow$ $x \in a \wedge \Psi(x,y)$

oder

$x \notin a \wedge x = y$

Diese Formel Φ ist funktional und erfüllt die Voraussetzungen des Ersetzungsaxioms.

Wende Ers auf a mit Formel Φ an und erhalte Z, so daß für jeden Keim g $\mathrm{Bild}(g) \subseteq Z$.

Nun sondere aus nach Ψ aus $a \times Z$:

$$f := \{(x,y) \in a \times Z \,;\, \Psi(x,y)\}$$

q.e.d.

Theorem REPRÄSENTATIONSSATZ FÜR WOHLORDNUNGEN

Für jede Wohlordnung $\mathfrak{W} = (W, <)$ existiert eine eindeutige Ord.z. α mit $\mathfrak{W} \cong (\alpha, \in)$.

Beweis. Eindeutigkeit ist bereits gezeigt. Verbleibt Existenz.

$\mathfrak{W}$ ist eine fundierte Struktur, also können wir den allg. Rekursionssatz auf $\mathfrak{W}$ anwenden.

Wir verwenden die zweistellige Operation

$$F(f) := \mathrm{Bild}(f)$$

und wenden den allg. Rek.satz auf W und F an.

D.h. wir erhalten f mit $\mathrm{Def}(f) = W$ und f.a. $w \in W$

$$\begin{aligned} f(w) &= F(f \upharpoonright <[w]) \\ &= \mathrm{Bild}(f \upharpoonright <[w]) \\ &= \{f(v)\,;\, v < w\} \end{aligned}$$

Setzen wir $A := \mathrm{Bild}(f)$.

Rekursionsgleichung

$$f(w) = \{f(v)\,;\ v < w\}$$

Beachte: f ist ordnungserhaltend von $(W, <)$ nach $(A, \in)$

$$v < w \iff f(v) \in f(w)$$

Somit ist f ein Iso zw. $(W, <)$ und $(A, \in)$. Also ist $(A, \in)$ wohlgeordnet.

<u>Beh.</u> A ist transitiv.

$$x \in y \in A = \mathrm{Bild}(f)$$

$$\Longrightarrow y \in f(w) \text{ für } w \in W$$

$$f(w) = \{f(v)\,;\ v < w\}$$

$$\Longrightarrow x = f(v) \quad v < w \in W.$$

$$\Longrightarrow x \in \mathrm{Bild}(f) = A.$$

Also ist A Ordinalzahl. q.e.d.