Mathematische Logik & Mengenlehre

7. Juni 2021

SECHZEHNTE VORLESUNG

FUNDAMENTALSATZ ÜBER WOHLORDNUNGEN

Seien $\mathfrak{W} := (W, <)$ und $\mathfrak{W}' := (W', <')$ Wohlordnungen. Dann ist:

$\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{W}'$

① $\mathfrak{W}$ isomorph zu einem AA von $\mathfrak{W}'$

ODER $\mathfrak{W}' \preceq \mathfrak{W}$

② $\mathfrak{W}'$ isomorph zu einem AA von $\mathfrak{W}$.

- $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{W}'$ $:\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{W}$ ist isomorph zu einem AA von $\mathfrak{W}'$
- $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$ $:\Longleftrightarrow$ $\mathfrak{W}$ ist isomorph zu einem echten AA von $\mathfrak{W}'$.

Da $\mathfrak{W}$ nicht isomorph zu einem echten AA von sich selbst:

$\prec$ ist irreflexiv.

offensichtlich:

$\preceq, \prec$ sind transitiv.

KLAUSURTERMIN

21. Juli 2021

15:45 – 17:45

Nachschreibtermin:
17. September 2021
15:45 – 17:45

In den nächsten Wochen: Musterklausur.

- ONLINE
- 120 MINUTEN
- ~~KOFFER~~ KLAUSUR

D.h. $\preccurlyeq, \prec$ verhalten sich auf den Wohlordnungen wie eine totale Ordnung BIS AUF ISOMORPHIE:

Falls $\mathfrak{W} \preccurlyeq \mathfrak{W}'$ und $\mathfrak{W}' \preccurlyeq \mathfrak{W}$, so gilt $\mathfrak{W} \cong \mathfrak{W}'$, aber nicht notwendigerweise $\mathfrak{W} = \mathfrak{W}'$.

Sollten wir für jede vorkommende Isomorphieklasse max. einen Repräsentanten haben, so tritt dieses Problem nicht auf.

<u>Def.</u> X heiße Wohlordnungsrepräsentantenmenge (WORM) falls alle Elt von X Wohlordnungen sind und für alle $(W,<), (W',<) \in X$ gilt
$$(W,<) \cong (W',<') \Longrightarrow (W,<) = (W',<)$$

<u>Bemerkung</u> Ist X eine WORM, so ist
$\prec$ eine strikte totale Ordnung (Ordn. i.S.v. $<$) und
$\preccurlyeq$ eine nichtstrikte totale Ordnung (Ordn. i.S.v. $\leq$) auf X.

Falls $(W,<)$, $(W',<')$ Wohlordnungen und $f : W \longrightarrow W'$ ist ordnungserhaltend, so ist f automatisch injektiv. Im Logikteil hatten wir eine solche Fkt. als Einbettung bezeichnet.

Wir erhalten

$$(W,<) \cong (\text{Bild}(f),<')$$

Dies ist eine Teilstruktur von $(W',<')$.

I.a. ist Bild(f) kein AS von $(W',<')$; aber nach dem FSWO ist entweder

$$(\text{Bild}(f),<') \preceq (W',<')$$

oder $(W',<') \preceq (\text{Bild}(f),<')$

Ist es möglich, daß $(W',<') \prec (\text{Bild}(f),<')$?

$g : W' \longrightarrow \text{Bild}(f) \subseteq W'$
Isomorphismus auf Bild(g).

$id : \text{Bild}(f) \longrightarrow W'$

Dann wäre $g \circ id : \text{Bild}(f) \longrightarrow \text{Bild}(f)$ eine Einbettung von Bild(f) in einen echten AA. ↯

D.h. es existieren nur die Möglichkeiten:

(*)
① $(\mathrm{Bild}(f), <') \prec (W', <')$

② $(\mathrm{Bild}(f), <') \cong (W', <')$

[Nicht notwendigerweise $=$; siehe dazu Gruppenarbeit G9!]

__Lemma__ Seien $\mathfrak{W}$ und $\mathfrak{W}'$ zwei Wohlordnungen. Dann sind äquivalent:

(1) $\mathfrak{W} \preceq \mathfrak{W}'$

(2) es ex. eine Einbettung von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$.

__Beweis__ (1) $\Rightarrow$ (2) trivial.

(2) $\Rightarrow$ (1). Sei f diese Einbettung. Dann ist $\mathfrak{W} \cong (\mathrm{Bild}(f), <')$. Nach (*) gilt

$$\mathfrak{W} \cong (\mathrm{Bild}(f), <') \prec \mathfrak{W}'$$

oder

$$\mathfrak{W} \cong (\mathrm{Bild}(f), <') \cong \mathfrak{W}'.$$

q.e.d.

Wir hatten, falls X eine WORM ist, so ist

$(X, \prec)$ eine Ord. i.S.v. $<$.

<u>Satz</u> In diesem Fall ist $\prec$ fundiert auf X. Also ist $(X, \prec)$ eine Wohlordnung.

<u>Beweis</u> Sei nun $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Wir müssen $\prec$-minimales Elt finden.

Sei nun $(W, <) \in Y$. Falls $(W, <)$ selbst $\prec$-minimal ist, so sind wir fertig.

Ist $(W, <)$ nicht minimal, dann ex. $\mathcal{W}' \in Y$ mit $\mathcal{W}' \prec (W, <)$

FSWO [$\Leftrightarrow$ es ex. ein $w \in W$ mit $\mathcal{W}' \cong (<[w], <)$ und w ist eindeutig bestimmt]

$\overline{Y} := \{ w \in W ;\ \exists \mathcal{W}' \in Y$ mit $\mathcal{W}' \cong (<[w], <) \}$

Falls $(W, <)$ nicht minimal, so ist $\overline{Y} \neq \emptyset$.

In diesem Fall hat $\overline{Y}$ ein minimales Elt. w mit einem $\mathcal{W}' \in Y$, so daß $\mathcal{W}' \cong (<[w], <)$

Dann ist $\mathfrak{W}'$ $\prec$-minimal in Y.

q.e.d.

<u>Korollar</u> $\mathfrak{W}, \mathfrak{W}'$ Wohlordnungen.

Dann sind äq.:

(1) $\mathfrak{W} \prec \mathfrak{W}'$

(2) es ex. Einbettung von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$ und kein Isomorphismus von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$.

[Achtung: (2) ist nicht "es ex. Einbettung von $\mathfrak{W}$ nach $\mathfrak{W}'$, welche kein Iso ist".]

<u>FAZIT</u>: Wohlordnungen sind wohlgeordnet <u>bis auf Isomorphie</u>. Sobald wir für jede Isomorphieklassen einen eindeutigen (kanonischen) Repräsentanten gewählt haben, so sind Wohlordnungen wirklich wohlgeordnet.

<u>ZIEL</u>: Finde solche kanonischen Repräsentanten.

EXKURS

Es gibt keine Menge aller Wohlordnungen.

Betrachte für vorgegebenes x die Struktur

$$\mathcal{W}_x = (\{x\}, \emptyset)$$
$$= \{\{\{x\}\}, \{\{x\}, \emptyset\}\}$$

$\mathcal{W}_x$ ist eine Wohlordnung.

$$\bigcup \mathcal{W}_x = \{\{x\}, \emptyset\}$$
$$\bigcup\bigcup \mathcal{W}_x = \{x\}$$

Falls C die Menge aller Wohlordnungen ist, so gilt $\mathcal{W}_x \in C$ für alle x.

Dann gilt für jedes x:

$$x \in \bigcup\bigcup\bigcup C$$

Also ist $\bigcup\bigcup\bigcup C$ universell.

Widerspruch!

ORDINALZAHLEN

Wir definieren spezielle Wohlordnungen, in der Hoffnung, daß sie uns kanonische Repräsentanten geben.

<u>Ziel.</u> Für jedes $\mathcal{W}$ Wohlordnung ex. ein eindeutig bestimmtes α mit $\mathcal{W} \cong \alpha$.

<u>Def.</u> Wir nennen eine Menge A <u>Ordinalzahl</u> gdw sie transitiv ist $[\forall x, y \; x \in y \in A \longrightarrow x \in A$

$$\Longleftrightarrow$$

$\forall y \; y \in A \longrightarrow y \subseteq A]$

und wenn die Elementrelation auf A eine Wohlordnung ist:

Definiere $E_A \subseteq A \times A$ durch $x E_A y \Longleftrightarrow x \in y$

Dann (A, E_A) ist Wohlordnung.

Schreibe hierfür verkürzt $(A, \in)$.

Wenn wir genau sein wollen, schreiben wir manchmal $(A, \in_A)$

Nochmals zur Transitivität

A ist transitiv

$\iff \forall x \forall y \; x \in y \in A \longrightarrow x \in A$

$\iff \forall y \; y \in A \longrightarrow y \subseteq A$

$\iff \forall y \; y \in A \longrightarrow \in_A[y] = y.$

$[\in_A[y] = y \cap A = y$

gdw $y \subseteq A]$

Ord.z. sind transitive durch $\in$ wohlgeordneten Mengen.

<u>Bsp.</u>

① $\emptyset$ ist eine Ordinalzahl.

② $\mathbb{N}$ ist transitiv und "$(\mathbb{N}, \in_{\mathbb{N}})$ ist fundiert" ist äq. zum Prinzip der kleinsten Zahl.

ist eine Ordinalzahl

③ $n \in \mathbb{N}$

Die natürlichen Zahlen erfüllen unsere Bedingung der Kanonizität: jede endliche Wohlordnung ist isomorph zu einer eindeutig bestimmten natürlichen Zahl.

Weitere Ordinalzahlen:

Wir hatten gesehen, daß $x \longmapsto S(x) = x \cup \{x\}$ die Transitivität erhält.

Insbesondere: $\mathbb{N} \rightsquigarrow S(\mathbb{N}) = \mathbb{N} \cup \{\mathbb{N}\}$

Dann ist $S(\mathbb{N})$ transitiv.

Wie sieht die Relation $\in_{S(\mathbb{N})}$ aus?

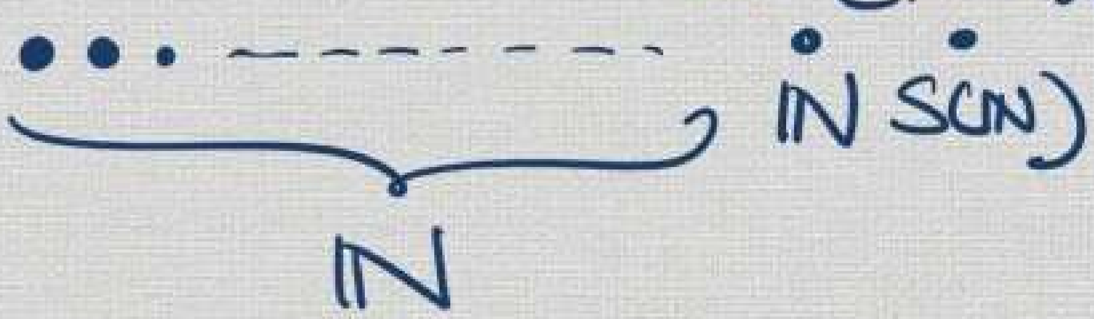
D.h. $\underline{(S(\mathbb{N}), \in)} \cong (\mathbb{N}, \in) \oplus (1, \in)$

SUMMENORDNUNG

Nach Übungsaufgabe ist die Summe zweier Wohlordnungen Wohlordnung. (P8)

Also ist $S(\mathbb{N})$ eine Ordinalzahl.

Ebenso $S(S(\mathbb{N})) \cong (\mathbb{N}, \in) \oplus (2, \in)$
$\cong (S(\mathbb{N}), \in) \oplus (1, \in)$



Zusammenfassend

Ist A Ordinalzahl, so ist $S(A)$ Ordinalzahl.

- 0
- 1
- 2
- 3

⋮

Wollen wir den Ordinalzahlcharakter von $\mathbb{N}$ betonen, so schreiben wir ω für diese Menge.

ω • $\boxed{\mathbb{N} \text{ "}\infty\text{"}}$

$\omega+1$ • $S(\mathbb{N})$ "$\infty+1$"

$\omega+2$ • $S(S(\mathbb{N}))$ "$\infty+2$"

usw.

TRANSFINITE ORDINALZAHLEN

$$\omega+1 := S(\omega)$$

$$\omega+(n+1) := S(\omega+n).$$

2.3 Hilfssatz. *Es sind äquivalent*: Sei α eine Ord.z.

(α) $x \in \alpha$;

(β) x *ist echtes* (d.h. *von* α *verschiedenes*) *Anfangsstück von* α *bzgl.* $\in_\alpha$;

(γ) x *ist transitiv und echte Teilmenge von* α.

Ebbinghaus-Konvention
Kleine griechische Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sind stets Ord.z.

Beweis

(β) $\Leftrightarrow$ (γ) folgt direkt aus den Definitionen.

Verbleibt nur zu zeigen (α) $\Leftrightarrow$ (β).

(α) $\Rightarrow$ (β). Sei $x \in \alpha$.

$\Longrightarrow$ $\underline{\in_\alpha[x]} = x$ [wg. Transitivität von α]

$\Longrightarrow$ x ist echtes AS von α.

(β) $\Rightarrow$ (α) Sei x echtes AS von α.

D.h. es ex. $\underline{y \in \alpha}$ mit $\underline{x = \in_\alpha[y]}$

Aber (nach Trs. von α) gilt

$\underline{y = \in_\alpha[y]}$.

$\Longrightarrow$ $x = y \in \alpha$.

q.e.d.

Korollar

- Elemente von Ordinalzahlen sind Ordinalzahlen.

[$x \in \alpha \longrightarrow x = \in_\alpha[x]$

$\longrightarrow$ x ist echtes AS von α & transitiv.

$\longrightarrow$ x ist transitive durch $\in$ wohlgeordnete Menge

$\longrightarrow$ x ist Ord. z.]

Andere Eigenschaften:

① α, β Ord. zahlen: $\alpha \cap \beta$ Ord. z.

[1. $\alpha \cap \beta$ ist durch $\in$-wohlgeordnet als TM von α;

2. Schnitte von transitiven Mengen sind transitiv]

② Sei A nichtleere Menge von Ord. z. $\bigcap A$ Ord. z.

[gleiches Argument.]

③ Falls $X \subseteq \alpha$ transitiv, so ist X Ord. z.

2.5 Satz. *Für alle α, β, γ gilt:*

(i) $\alpha \notin \alpha$.

(ii) $\alpha \in \beta \wedge \beta \in \gamma \rightarrow \alpha \in \gamma$.

(iii) $\boxed{\alpha \in \beta} \vee \boxed{\alpha = \beta} \vee \boxed{\beta \in \alpha.}$

(iv) $\alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \in \beta \vee \alpha = \beta$.

(v) $\alpha \subseteq \beta \vee \beta \subseteq \alpha$.

KANONIZITÄTSSATZ

(iii) liefert uns, daß Ord.z. die gewünschten kanonischen Repräsentanten sind.

Beweis (i) Um Verwirrung zu vermeiden, schreiben wir hier $\in_\alpha$ für die Relation auf α.

Falls $\alpha \in \alpha \implies \alpha \in_\alpha \alpha$

$\implies \in_\alpha$ nicht irreflexiv

$\implies \alpha$ ist keine Ord.z.

(ii) Folgt direkt aus "γ ist transitiv".

(iv) & (v) folgen direkt aus (iii) mit Hilfssatz.

Bleibt zu zeigen: (iii)

Seien α, β beliebig. Betrachte $\gamma := \alpha \cap \beta$.

[Beachte γ ist Ord.z.]

$\gamma \subseteq \alpha$ und $\gamma \subseteq \beta$

Fall 1: $\gamma = \alpha \wedge \gamma = \beta \longrightarrow \alpha = \beta$.

2: $\gamma \subsetneq \alpha \wedge \gamma = \beta \longrightarrow \beta = \gamma \in \alpha \longrightarrow \beta \in \alpha$.

3: $\gamma = \alpha \wedge \gamma \subsetneq \beta \longrightarrow \alpha = \gamma \in \beta \longrightarrow \alpha \in \beta$.

4: $\gamma \subsetneq \alpha \wedge \gamma \subsetneq \beta \longrightarrow \gamma \in \alpha \wedge \gamma \in \beta \longrightarrow \gamma \in \alpha \cap \beta = \gamma$.

Wid. zu (i) q.e.d.

Frage: Gibt es denn eigentlich für jede Wohlordnung einen solchen Repräsentanten?

$(\mathbb{N},<) \oplus (n,<) \cong \omega + n$

??

Gibt es ein α Ord.-z.

$\alpha \cong (\mathbb{N},<) \oplus (\mathbb{N},<)$?